Esercizio n.1 [12 punti]

Due cilindri coassiali di raggio ***a*** e ***b***, e lunghezza ***L***, riempiti con un dielettrico ε_r, costituiscono un condensatore cilindrico. Si supponga che la costante dielettrica del materiale sia variabile lungo l'asse ***z*** dei cilindri secondo la relazione $\varepsilon_r=1+\alpha z$. I cilindri sono posizionati con una faccia in ***z=0*** e l'altra in ***z=L.***
1) Calcolare la capacità del condensatore.
2) Si supponga ora che il condensatore sia riempito con un materiale avente ε_R costante. Il condensatore viene collegato ad una pila di f.e.m. ***V.*** Trovare la forza che si esercita fra le due superfici cilindriche.
Si considerino i cilindri sufficientemente lunghi da poter trascurare qualunque effetto di disuniformità e di dispersione del campo elettrico ai bordi.

Dati: $a = 10$ mm ; $b= 11$ mm ; $L= 1,5$ m ; ε_r (domanda 1)$=1+\alpha z$; $\alpha=3\ m^{-1}$;
ε_r (domanda 2)$=2,5$; $V=5$ kV

Soluzione

1) La capacità di un condensatore cilindrico (a,b,L), con un dielettrico ε_r fra le armature, è: $C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(b/a)}$,

La capacità infinitesima di una sezione cilindrica di spessore ***dz*** del cilindro, posta in ***z,*** sarà:

$dC=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(z)dz}{\ln(b/a)}$, le capacità ***dC*** risultano tutte in parallelo, quindi la capacità totale è la loro somma:

$$C=\int_0^L dC=\int_0^L\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(z)dz}{\ln(b/a)}\int_0^L\frac{2\pi\varepsilon_0(1+\alpha z)dz}{\ln(b/a)}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}\cdot\left(1+\frac{\alpha L}{2}\right)\cong 2,85\ nF$$

Il condensatore è come se avesse una costante dieletrica equivalente costante: $\varepsilon_r=1+2,25=3,25$

2) La capacità del condensatore cilindrico (a,b,L) è: $C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(b/a)}\cong 2,2\ nF$, la sua energia potenziale una volta portato ad una d.d.p. V è: $E_p=\frac{1}{2}CV^2=\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(b/a)}V^2$, la forza , che per simmetria sarà radiale (attrattiva o repulsiva), può essere calcolata, considerando che, se il condensatore lavora a tensione costante, la sua energia totale è – la sua energia potenziale, quindi la forza sarà

$$F(b)=-\frac{\partial E_T}{\partial b}=\frac{\partial E_p}{\partial b}=-\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{[\ln(b/a)]^2}\frac{V^2}{b}\cong -26\quad N/m$$ la forza è attrattiva.

Esercizio n.2 [9 punti]

In una zona dello spazio è presente un campo di induzione magnetica ***B***, diretto verso l'alto e di modulo $\overline{B} = \frac{a}{z_0 + z}\hat{z}$. Nel campo ***B*** è immerso un magnete permanente di forma cilindrica di raggio ***R*** e altezza ***h*** libero di scorrere lungo una guida verticale che passa per il suo asse; il magnete ha una magnetizzazione costante ***M*** diretta verso il basso, e massa ***m***. Si calcoli il valore di ***z*** per cui il magnete è in equilibrio. Si assuma che z(magnete)≥0, che il magnete sia di piccole dimensioni, e che l'accelerazione di gravità sia costante con l'altezza.
[Suggerimento: il problema può essere risolto anche facendo riferimento alle relazioni che legano un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico]

Dati: $\overline{B} = \frac{a}{z_0 + z}\hat{z}$ ***; a= 2 Tm ; z_0= 10 cm ; R= 1 cm ; h= 2 cm ;*** $|M|$ ***=40 A/m ; m=2 g***

Soluzione

La forza che si esercita fra un dipolo magnetico $\overline{m}$ immerso in un campo magnetico $\overline{B}$ è $\overline{F} = \nabla(\overline{m} \cdot \overline{B})$,

Il momento di dipolo magnetico del cilindro sarà il prodotto di $\overline{M}$ (momento magnetico per unità di volume) per il volume ***V***, quindi . $\overline{m} = \overline{M} \cdot V = -M \pi R^2 h \hat{z}$
In questo caso l'unica componente diversa da zero sarà quella verticale, lungo l'asse ***z***, quindi

$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\overline{m} \cdot \overline{B}) = -m\frac{\partial B}{\partial z} = -M \pi R^2 h \frac{-a}{(z_0 + z)^2}$, quindi è una forza diretta verso l'alto. La posizione di equilibrio si avrà quando questa forza sarà uguale, in modulo, alla forza di gravità che si esercita sul cilindretto, quindi.

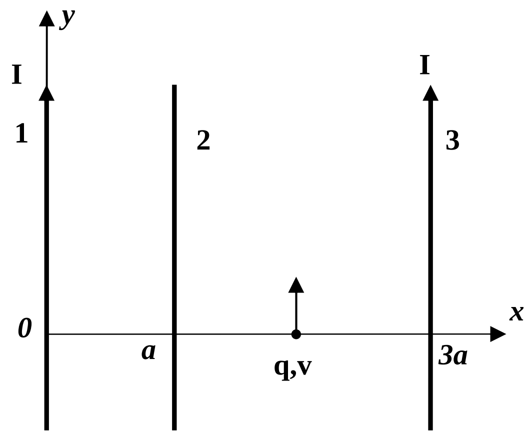
$F_z = F_g$, cioè : $M \pi R^2 h \frac{a}{(z_0 + z)^2} = mg$, che, scrivendo : $A = \frac{M \pi R^2 h a}{mg}$ è soddisfatta quando :

$(z_0 + z)^2 = A$, quindi per : $z = \sqrt{A} - z_0 = (0{,}16 - 0{,}1)m = 0{,}06\ m = 6\ cm$

La soluzione negativa viene scartata perché deve essere z≥0.

Esercizio n.3 [9 punti]

Tre fili rettilinei infinitamente lunghi, paralleli e complanari [1,2,3] sono disposti in **x=0, x=a, x=3a**, come mostrato in figura. I due fili esterni sono entrambi percorsi da una corrente **I**, mentre sul filo intermedio è uniformemente distribuita una carica con densità lineare **h.**
Si scriva l'espressione (in modulo, direzione e verso) delle singole forze agenti su un elettrone che si trovi in **x=2a** con velocità **v** parallela ai fili [vedi disegno].
Si determini il valore di **h** (in modulo e segno) per cui la forza agente sull'elettrone risulti nulla.



Dati: **v=*100 m/s;*** **I=*6 A***

Soluzione

La forza risultante sull'elettrone è data da $\bar{F} = q\left(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}\right)$.
Il modulo del campo B di un singolo filo percorso da corrente è data dalla formula di Biot- Savart: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, mentre il modulo del campo E generato dal filo carico con h lineare è dato da (legge di Gauss): $E(r) = h/\left(2\pi\varepsilon_0 r\right)$

Quindi le singole forze esercitate su di una carica q posta in $x=2a$ sono:

$$F(1) = -\frac{qv\mu_0 I}{2\pi \cdot (2a)}\hat{x} > 0$$

$$F(2) = \frac{qh}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{x} < 0$$

$$F(3) = \frac{qv\mu_0 I}{2\pi a}\hat{x} < 0$$

dove q è la carica elettrica, negativa, dell'elettrone, si noti che per valutare la posizione di equilibrio il segno di q non è influente.

Affinché si abbia una forza nulla sull'elettrone deve verificarsi che:

$$-\frac{qv\mu_0 I}{2\pi \cdot (2a)} + \frac{qh}{2\pi\varepsilon_0 a} + \frac{qv\mu_0 I}{2\pi a} = 0$$

$$cio\grave{e}: h = -\frac{v\mu_0\varepsilon_0 I}{2} = -\frac{vI}{2c^2} = -\frac{10^2 \cdot 6}{2 \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2} = -0{,}33 \cdot 10^{-14} \quad C/m$$