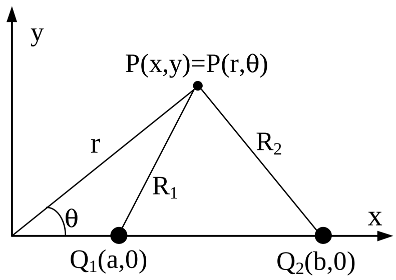
Esercizio n.1 [12 punti]

Nel piano (x,y) sono fissate due cariche elettriche puntiformi: Q_1 nel punto $P_1(a,0)$ e Q_2 nel punto $P_2(b,0)$, essendo $Q_1 = -\beta \cdot Q_2$ e $\beta = \sqrt{(a/b)}$.

1) Scrivere l'espressione del potenziale elettrostatico in un punto generico P(x,y)=P(r,θ). Si consiglia di utilizzare le coordinate polari (r,θ).
2) Si trovi il luogo dei punti del piano in cui il potenziale elettrostatico V=0.
3) Supponendo che sia b=2a , si calcoli il valore del campo $\bar{E}$ (modulo e verso) nel punto $P_0(x,y) \equiv (\sqrt{ab}, 0)$.

Dati: Q_2= 2 nC, a = 2 cm.

Soluzione



1) Il potenziale in P è la somma dei potenziali creati dalle due cariche Q1 e Q2:

$$V(r,\theta) = V(Q_1) + V(Q_2) = \frac{kQ1}{R_1} + \frac{kQ2}{R_2} = kQ_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_1}\right)$$

Essendo $k=1/4\pi\varepsilon_0$

Le relazioni fra $R_{1,2}$, a, b, (x,y),(r, θ) sono: $R_1^2 = y^2 + (x-a)^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$ (1)

e: $R_2^2 = y^2 + (x-b)^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\theta$ (1')

2) Il potenziale V sarà nullo dove V=0 , cioè per $\frac{1}{R_2} = \frac{\beta}{R_1}$ o $R_2 = \frac{R_1}{\beta}$ (2)

Le (1), inserite nella (2)al quadrato: $R_2^2 = \frac{R_1^2}{\beta^2} = R_1^2\frac{b}{a}$ danno, utilizzando le coordinate polari:

$b^2 + r^2 - 2br\,cos\,\theta = (a^2 + r^2 - 2ar\,cos\,\theta)\frac{b}{a}$, semplificando: $b^2 + r^2 = a\,b + r^2\frac{b}{a}$ da cui:

$r^2 = ab$ quindi: $\boldsymbol{r = \sqrt{ab} = costante.}$ Che rappresenta una circonferenza di raggio r.

3) Il campo E sull'asse delle x, in un punto intermedio fra Q_1 e Q_2 , può essere calcolato semplicemente come somma dei campi generati dalle due cariche, d ed f essendo la distanza fra le cariche Q1, Q2, ed il punto (√ab, 0):

$$E(x) = E(Q_1) + E(Q_2) = -\frac{k|Q_1|}{d^2} - \frac{k|Q_2|}{f^2} = -\frac{k|Q_1|}{\left(a(\sqrt{2}-1)\right)^2} - \frac{k|Q_2|}{\left(a(2-\sqrt{2})\right)^2} =$$

$$= -\frac{kQ_2}{a^2}\frac{1+\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)^2} \cong -\frac{kQ_2}{a^2}\cdot 7 = -\frac{9\,10^9 \cdot 2\,10^{-9}}{4\cdot 10^{-4}}\cdot 7 \cong -\mathbf{3.1\,10^5\ V/m}$$

In alternativa il campo può essere calcolato dal potenziale V(r,θ) utilizzando la definizione: $\bar{E} = -\bar{\nabla}V$ che, in coordinate polari (r,θ), ha componenti:

$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$; $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$ che dovranno essere calcolati nel punto (r,θ)=($\sqrt{ab}$, 0).

tenendo conto che b=2a e quindi β=1/√2 , il potenziale si scrive come:

$$V(r,\theta) = kQ_2\left(\frac{1}{R2} - \frac{1}{\sqrt{2}R1}\right) = kQ_2\left(\frac{1}{\sqrt{4a^2+r^2-4ar\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\right)$$

La componente θ del campo E sarà:

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{kQ_2}{2r}\left[(4a^2+r^2-4ar\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}(4ar\sin\theta\ ) - (2a^2+2r^2-4ar\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}(4a\,\mathrm{r}\sin\theta\ )\right]$$

che per $\theta=0$ vale 0, quindi: $\mathbf{E_\theta=0}$**,** come ci si doveva aspettare.

La componente r del campo E sarà:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{kQ_2}{2}\left[(4a^2+r^2-4ar\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}(2r-4a\cos\theta) - (2a^2+2r^2-4ar\cos\theta)^{-3/2}(4r-4a\cos\theta)\right]$$

, che per $\theta = 0$ e $r=a\sqrt{2}$ diventa:

$$E_r = kQ_2\left[\left(4a^2+2a^2-4a^2\sqrt{2}\right)^{-3/2}\cdot\left(a\sqrt{2}-2a\right) - \left(2a^2+4a^2-4a^2\sqrt{2}\right)^{-3/2}\cdot\left(2\sqrt{2}a-2a\right)\right]$$
$$= kQ_2\left[\left(6a^2-4a^2\sqrt{2}\right)^{-3/2}\cdot\left(a\sqrt{2}-2\sqrt{2}a\right)\right] = -\frac{kQ_2}{a^3}\left(6-4\sqrt{2}\right)^{-3/2}\cdot\left(a\sqrt{2}\right)$$

quindi $\boldsymbol{E_r = -\frac{kQ_2}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(6-4\sqrt{2}\right)^3}} \cong -\frac{kQ_2}{a^2}\cdot 7 \cong -3,1\ \cdot 10^5\quad V/m}$

Esercizio n.2 [8 punti]

Un filo conduttore indefinito è disposto lungo l'asse di una superficie cilindrica infinitamente lunga, non conduttrice, su cui è distribuita una carica positiva con densità superficiale σ.
Il raggio della superficie cilindrica è R=1cm. E' noto che alla distanza r_0=2cm dall'asse del sistema il campo elettrostatico vale $E(r_0)=1.5\cdot10^4$ V/m.
Determinare la densità di carica σ e l'intensità di corrente i_0 che deve scorrere nel filo affinché delle particelle cariche lanciate parallelamente all'asse del sistema a distanza r>R e con velocità v=c/2 non vengano deflesse.

Soluzione

Per il teorema di Gauss applicato ad una superficie cilindrica di lunghezza l e raggio r>R si ha:

$$2\pi r l E(r) = 2\pi R l\sigma/\varepsilon_0$$

Da cui $E(r)=R/r\cdot\sigma/\varepsilon_0$

Quindi, noto il campo alla distanza $r = r_0$, troviamo:

$$\boldsymbol{\sigma = \frac{r_0 E(r_0)\varepsilon_0}{R}} = \frac{2\cdot 1{,}5\ 10^4\cdot 8{,}85\ 10^{-12}}{1} \cong \boldsymbol{2.7\cdot10^{-7}\quad C/m^2}$$

Quando nel filo disposto lungo l'asse della superficie cilindrica scorre una corrente i_0 a distanza r, si ha, oltre al campo elettrostatico E(r), un campo magnetico di intensità $B(r)=\mu_0 i_0/2\pi r$.

In queste condizioni una carica puntiforme a distanza r dal filo sentirà l'effetto di entrambi i campi.

Assumendo che la velocità delle cariche sia concorde alla corrente i_0 si ha:

$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) = 0$ da cui, imponendo F=0, risulta:

$$\boldsymbol{i_0} = \frac{2\pi R\sigma}{v\,\varepsilon_0\,\mu_0} = \frac{2 \cdot 2\pi R\sigma \cdot c^2}{c} = \boldsymbol{4\pi R\sigma \cdot c} = 4 \cdot 3{,}14\ 10^{-2} \cdot 2{,}7\ 10^{-7} \cdot 3\ 10^{8} \cong \mathbf{9{,}8}\ \boldsymbol{A}$$

Esercizio n.3 [8 punti]

Una sbarra conduttrice di lunghezza L ruota nel piano x,y in senso orario intorno all'asse z con velocità angolare ω = 2 rad/s. Nella regione di spazio in cui avviene la rotazione è presente un campo di induzione magnetica $\bar{B} = \beta \times r\,\hat{z}$, in cui $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, , diretto lungo z.

1) Se la sbarretta è incernierata su un estremo, quanto vale la ddp tra tale estremo e il bordo esterno della sbarretta?
2) Ricavare inoltre la ddp tra il centro e gli estremi nel caso in cui la sbarretta sia incernierata al centro.

Dati: L=2 m , $\beta= 1\cdot 10^{-2}$ T/m

Soluzione

1) All'equilibrio la forza di Lorentz totale agente sugli elettroni del metallo deve essere nulla:

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) = 0 \quad \text{quindi deve essere: } \bar{E} = -\bar{v}\ x\ \bar{B}$$

Assumendo l'asse delle x diretto secondo la sbarra, in un punto generico x sulla sbarra si ha, ricordando che $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{x}$, e che B(x) = βx

$E_x(x) = \omega\ x\ B(x) = \omega\,\beta\,x^2$.

Quindi nel primo caso:

$$V(O) - V(L) = \int_0^L E_x(x)dx = \frac{\boldsymbol{\omega\beta L^3}}{\mathbf{3}} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 8}{3} \cong 53\ mV$$

(in cui l'integrale si estende su tutta la lunghezza L della sbarretta).

2) Mentre nel secondo caso:

$$V(O) - V(L/2) = \int_0^{L/2} E_x(x)dx = \frac{\boldsymbol{\omega\beta L^3}}{\mathbf{24}} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 8}{24} \cong 6{,}6\ mV$$

(in cui l'integrale è esteso da 0 a L/2).