Esercizio n.1 [8 punti]

Due corpi puntiformi A e B di massa m ed M (M>>m) rispettivamente, e con carica $Q_A = q$ e $Q_B = 3q$ si trovano a grande distanza uno dall'altro, nel vuoto. Il corpo A viene lanciato verso il corpo B con velocità v_0. Si calcoli a quale distanza dal corpo B la velocità di A diventa la metà di quella iniziale.

Dati: $M= 10^3 \cdot m$; $m = 10^{-9}$ kg ; v_0=3 km/s ; q= - 1μC.

Soluzione

La massa del corpo B è molto maggiore di quella del corpo A, quindi possiamo trascurare il moto di B. L'unica forza agente sul corpo A è quella elettrostatica esercitata dal corpo B (si può trascurare la forza peso). Quindi l'energia totale si conserva. L'energia iniziale del corpo A è esclusivamente cinetica:

$E(\infty) = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$. Alla generica distanza r dal corpo B l'energia di A è la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale: $E(r) = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{k\, Q_A\, Q_B}{r}$, dove $k=1/4\pi\varepsilon_0$.

Uguagliando $E(\infty)=E(r)$ si trova l'espressione di r in funzione della velocità v:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{k\, Q_A\, Q_B}{r} \qquad \text{da cui:} \qquad \frac{1}{2} m\left(v_0^2 - v^2\right) = \frac{3kq^2}{r}$$

Inserendo quindi la condizione $v=v_0/2$ si ha:

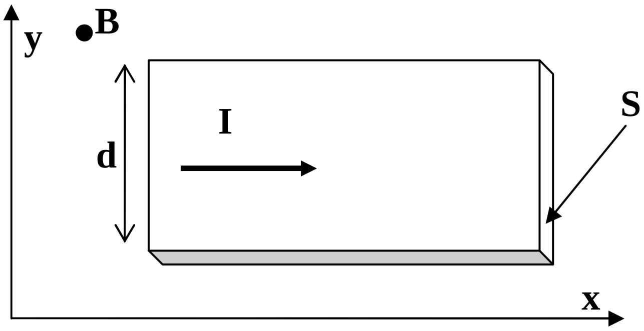
$$r = \frac{8kq^2}{mv_0^2} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-12}}{10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^6} = 8 \text{ m}$$

Esercizio n.2 [10 punti]

Si consideri una lastrina di un conduttore in cui i portatori di carica sono elettroni, di sezione **S** e larghezza **d**, in cui scorre una corrente continua **I** in direzione longitudinale. Nello spazio è presente un campo di induzione magnetica $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\,\hat{\mathbf{z}}$ costante ed uniforme, in direzione perpendicolare alla lastra ed alla direzione della corrente.

Si calcoli il valore della differenza di potenziale che si manifesta a regime ai capi della lastra.

Dati: $S=1\ mm^2$; $d=1\ cm$; $I=10\ A$; $B=0{,}7\ T$; n(numero dei portatori di carica/volume) = $6 \cdot 10^{28}\ e/m^3$.



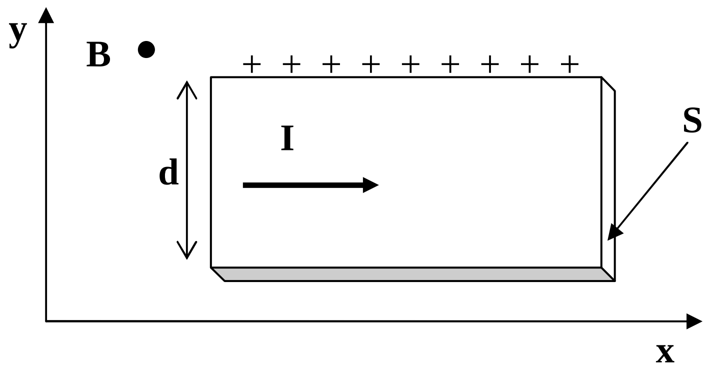
Soluzione

Quando la corrente inizia a scorrere nella lastra i portatori di carica vengono sottoposti alla forza di Lorentz:

$\bar{F}_L = -e\,\bar{v} \times \bar{B}$ dove con “e” si intende il modulo della carica dell’elettrone.

Dalla figura: $\bar{B} = B\,\hat{z}$; $\bar{v} = -v\,\hat{x}$, quindi $\bar{F}_L = -evB\,\hat{y}$; gli elettroni continuano a spostarsi verso il bordo esterno della lastra fin quando il campo elettrostatico creato genera una forza uguale e contraria alla forza di Lorentz.

$$\bar{F}_E = -e\bar{E} = -\bar{F}_L = evB\,\hat{y}$$



Il valore della differenza di potenziale ΔV sarà $\Delta V = d \cdot E = d \cdot e \cdot v \cdot B$.

Per calcolare la differenza di potenziale è necessario calcolare la velocità (di deriva) degli elettroni che si può ottenere dalla definizione della densità di corrente J:

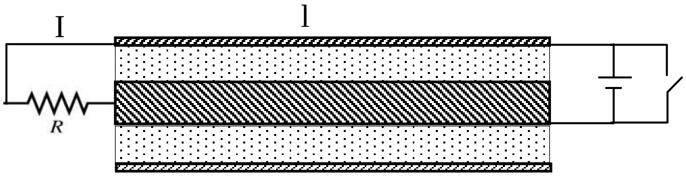
$J = nev = \frac{I}{S}$ da cui si ha $v = \frac{I}{enS}$ e quindi $\Delta V = \frac{IdB}{enS} = \frac{10 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-2}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6\ 10^{28} \cdot 10^{-6}} \cong 7{,}3\ \mu V$

Esercizio n.3 [12 punti]

Un sistema è composto da due conduttori cilindrici coassiali di lunghezza **l** e rispettivamente di raggi **a** e **b** [con l>>b>a] nei quali scorre la stessa corrente costante **I** in verso opposto. Lo spazio fra i due conduttori è riempito con un materiale paramagnetico di permeabilità relativa □$_r$.

1) Disegnare qualitativamente l'andamento del campo magnetico H in tutto lo spazio vicino ai conduttori, supponendo che il resto del circuito sia molto lontano e trascurando gli effetti ai bordi.
2) Si calcoli il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza del sistema composto dai due conduttori cilindrici.
3) Supponendo di chiudere l'interruttore del circuito mostrato in figura al tempo t=0, si chiede di calcolare esplicitante l'espressione dell'energia dissipata nella resistenza R dal momento iniziale t=0 fino a quando il sistema diventa stazionario.

Dati: l =10 m, a= 1 mm, B= 2,7 mm, I=2A , μ_r=2, R=10 Ω.



Soluzione

Il campo magnetico è diverso da zero solo nella parte di spazio esterna al cilindro esterno, infatti per una qualsiasi linea chiusa, giacente in un piano perpendicolare agli assi dei cilindri, concatenata con il sistema, deve essere:

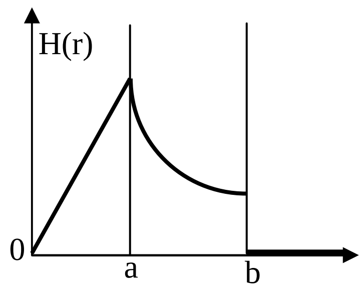
$\oint \bar{H} \times d\bar{l} = \sum I_i = I_a + I_b = 0$ da cui si ha che, per r>b: $\bar{H} = 0$, r essendo la distanza dall'asse dei cilindri.

Fra i due conduttori, per una circonferenza di raggio a≤r≤b, si ha $\oint \bar{H} \times d\bar{l} = \sum I = I$ da cui: $H(r)|_a^b = \frac{I}{2\pi r}$

Nel conduttore interno scorre una densità di corrente $J = I/\pi a^2$, uniforme in tutta la sezione , quindi:

$I(r) = JS(r) = \frac{I \cdot \pi r^2}{\pi a^2} = I\frac{r^2}{a^2}$ Da cui posso calcolare $\oint H(r)dl = H(r)\ 2\pi r = I(r)$, cioè , per r≤a: $H(r) = \frac{I\,r}{2\pi a^2}$

Il campo H avrà quindi il seguente andamento:



Il coefficiente di autoinduzione si trova calcolando il flusso del vettore B concatenato con il circuito; trascurando la parte di circuito esterna in cui il campo magnetico è nullo, supponendo di considerare una superficie piana di lunghezza l che passi per l'asse dei due conduttori:

Si ha: $L = \int \frac{d\phi(B_l)}{I} = \int \frac{B}{I(r)} dS = \int_0^b \frac{B(r) l dr}{I(r)} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\int_0^a \frac{r dr}{a^2} + \mu_r \int_a^b \frac{dr}{r}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\frac{1}{2} + \mu_r \ln\frac{b}{a}\right)$

Da cui il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza risulta essere:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \mu_r \ln\frac{b}{a}\right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 5 \cdot 10^{-7} \cong 0{,}5\ \frac{\mu H}{m}$$

Se l'interruttore viene chiuso la f.e.m cessa di inviare corrente nel circuito, la corrente quindi decade come in un circuito R,L con costante di tempo τ=L/R , dal valore iniziale I fino a zero. Il valore della corrente in funzione del tempo si trova integrando l'equazione del circuito: $RI(t) = -L\frac{dI(t)}{dt}$ che fornisce $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ .La potenza istantanea dissipata in R sarà $P(t)=RI^2(t)$, da cui si ha $P(t) = \frac{dE}{dt} = RI_0^2 e^{-2t/\tau}$, L'energia dissipata *dE*, integrata fra t=0 e t=∞, fornisce: $E_{TOT} = \int_0^\infty RI_0^2 e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{10 \cdot 0{,}5\ 10^{-6} \cdot 4}{2} = 10^{-5}$ J