Esercizio n.1 [9 punti]

Una superficie sferica conduttrice di raggio ***a*** e centro nell'origine, ha un potenziale elettrico ***V(r)*** tale che:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{per } r \le a \\ V_0 \frac{a}{r} & \text{per } r \ge a \end{cases}$$

Scrivere e calcolare l'espressione dell'energia potenziale del sistema.

Dati: ***V_0 = 5 V ; a = 1cm***

Soluzione

La densità di energia del campo elettrostatico nel vuoto è: $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$, il campo E si trova dalla $\bar{E} = -\nabla V$,

quindi, lavorando in coordinate sferiche, si ha: $\bar{E} = -\nabla V = \begin{cases} 0 & \text{per } r \le a \\ V_0\, a/r^2 \;\hat{r} & \text{per } r \ge a \end{cases}$

da cui: $\mathscr{E} = \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\frac{V_0\, a}{r}\right]^2 d\tau = \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\frac{V_0\, a}{r^2}\right]^2 4\pi r^2 dr = 2\pi\varepsilon_0 V_0^2 a \cong 14$ pJ

Si può **anche** (cioè è la stessa energia calcolata in altro modo) calcolare come:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} Q(sfera) \cdot V(a) = \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0 V_0 \; a \cdot V_0$$

Esercizio n.2 [12 punti]

Trovare la capacità per unità di lunghezza di un conduttore cilindrico di raggio ***a = 2 cm***, posto nel vuoto di fronte ad un piano conduttore infinito collegato a massa, parallelo all'asse del conduttore, ad una distanza ***d = 5 cm*** da esso [Si consideri 2d>>a].

Soluzione

La capacità del sistema cilindro + piano, fra cui c'è induzione completa, si può trovare calcolando la differenza di potenziale fra i due corpi in funzione di una carica ***Q=λL*** fornita al conduttore cilindrico.

Il problema si può risolvere utilizzando la tecnica delle cariche immagini. Il potenziale nella parte di spazio dove c'è il conduttore sarà uguale a quello che si ha eliminando il piano e sostituendolo con un conduttore "immagine" di valore ***–Q*** posto a distanza ***d*** dal piano, dal lato opposto a quello del conduttore.

Il potenziale a distanza ***a*** dal conduttore cilindrico sarà:

$V(a) = V(\text{cilindro}) + \text{V}(immagine)$.

Considerando che il potenziale a distanza r da un filo carico è $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + c$, si può scrivere:

$$V(a) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln a + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2d-a) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2d-a}{a} \cong \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2d}{a} \qquad \text{avendo posto } 2d>>a)$$

Mentre: V(immagine) = - V(a)

La differenza di potenziale fra il cilindro ed il piano sarà V(a)- V(piano)= V(a) -0 = V(a), e quindi la capacità per unità di lunghezza:

$$\frac{C}{L} = \frac{1}{L}\frac{Q}{V} = \frac{\lambda\, L\, 2\pi\varepsilon_0}{L\lambda \ln\frac{2d}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2d}{a}} \cong 34 \quad pF/m$$

Si ottiene lo stesso risultato sia considerando un cilindro finito, di lunghezza L>>a, oppure calcolando il campo elettrico…

Esercizio n.3 **[9 punti]**

Un circuito elettrico rigido, disposto nel piano ***z=0***, ha un'area ***S= 0,7 m²***. Scrivere la f.e.m. indotta nel circuito se nello spazio è presente un campo $\bar{B} = B_0 \cos\omega t \; (\hat{y} + \hat{z})$. Trovare in quale istante si ha la f.e.m massima e quale valore assume.

Dati: $\boldsymbol{B_0 = 50\ mT}$; $\boldsymbol{\omega = 10^3\ rad/s}$

Soluzione

Il campo B e la normale al piano non hanno la stessa direzione, quindi il prodotto scalare va calcolato esplicitamente

$$v = -\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \bar{B}\cdot\overline{dS} = -\frac{\partial}{\partial t}\int B_0 \cos\omega t\,(\hat{y}+\hat{z})\cdot\hat{z}\;dS = B_0\, S\, \omega \sin\omega t = 35\;\sin 10^3 t$$

La f.e.m. indotta sarà massima dopo ¼ di periodo, quindi dopo t = T/4 = π/2ω = π/2 ms ≅ 1,6 ms, istante in cui assumerà il valore v(max)= 35 Volt.