Esercizio n.1 [8 punti]

Un filo infinito carico uniformemente con densità lineare di carica **λ=60 μC/m** è posto lungo l'asse delle ***x***. Calcolare il flusso del campo elettrico per unità di lunghezza che attraversa il piano, infinito in direzione x, posto in **z_o=-3 m** e limitato da $\boldsymbol{y \leq |\sqrt{3}|}$ **m** .

Attenzione, nel testo c'è un errore rispetto alla soluzione proposta. La soluzione che segue vale per $|y| \leq \sqrt{3}$ quindi per $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. La relazione riportata nel testo invece comporta $-\infty < y \leq \sqrt{3}$, in questo caso la variabile α andrà da –π/2 ad α_{MAX}. Il risultato dell'integrale sarà quindi $\frac{\phi}{l} = \frac{\lambda}{3\varepsilon_0} = 2,2 \ \ 10^6 \ \ V$.

Il compito viene considerato fatto bene in entrambi i modi, se svolti coerentemente.

Soluzione

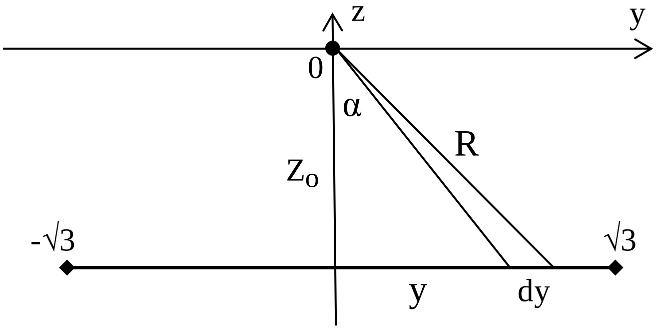
Il filo infinito genera nello spazio un campo elettrico $\overline{\boldsymbol{E}} = \frac{2k\lambda}{R}\widehat{\boldsymbol{R}}$ **dove k=1/4πε$_o$** ed R è la distanza dal filo. Il flusso infinitesimo in una striscia di larghezza ***dy***, nel punto di coordinata ***y*** sarà, per una lunghezza ***l***:

$$d\phi = \bar{E}\cdot d\bar{s} = \bar{E}\cdot\hat{n}\,dy\cdot\, l = \frac{2k\lambda}{z_o/\cos\alpha}\cdot\cos\alpha\,\cdot dy\,\cdot l = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 z_0}\cos^2\alpha\,\cdot l\,dy = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} l\,d\alpha$$

Avendo utilizzato le relazioni: $z_o = R\cos\alpha$; $dy = \frac{Rd\alpha}{\cos\alpha} = \frac{z_0 d\alpha}{cos^2\alpha}$,

Da cui il flusso per unità di lunghezza, moltiplicando per 2 per tener conto anche della parte delle y<0, sarà:

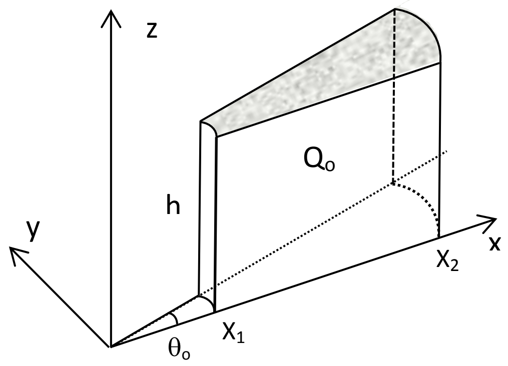
$$\frac{\phi}{l} = 2\int\frac{d\phi}{l} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{\alpha_{max}} d\alpha = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\alpha_{max} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[arctg\frac{y_{max}}{z_0}\right] = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{6} = \frac{\lambda}{6\varepsilon_0} = 1{,}1\ 10^6 \ \ Volt$$



Esercizio n.2 [12 punti]

All'interno del condensatore mostrato in figura (non in scala) è posto un dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r . Il condensatore è stato caricato con una carica $\boldsymbol{Q_o}$. a) Calcolare il valore della capacità del condensatore.
b) Calcolare il valore della forza per unità di superficie che si esercita fra le armature del condensatore, individuando i punti, o le zone, dove tale forza è massima.
[Il condensatore non può essere approssimato con un condensatore piano].

Dati: h= 5 mm ; x_1= 1 mm ; x_2= 20 mm ; θ_0= 5^0 ;
ε_r = 3,6 ; Q_o= 30 pC



Soluzione

a) Il valore del condensatore si può calcolare considerando il parallelo dei condensatori infinitesimi ed integrando sulla x :
$dC = \varepsilon \frac{hdx}{\theta_o x}$ dove $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$; $C = \int dC = \frac{\varepsilon h}{\theta_o} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \frac{\varepsilon h}{\theta_o} \ln \frac{x_2}{x_1} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}6 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 360}{5 \cdot 2\pi} \ln 20 = 5{,}5\, pF$

b1) La forza fra le armature del condensatore si può calcolare dal gradiente dell'energia del condensatore infinitesimo dC:
L'energia di un condensatore infinitesimo dC è:

$$d\mathcal{E}(dC) = \frac{1}{2} \frac{Q^2\,(dC)}{dC} = \frac{1}{2dC} [\sigma dS]^2 = \frac{1}{2} \frac{\theta_o x}{\varepsilon h dx} \;\sigma^2 h^2 dx^2 = \frac{\theta_o h x dx}{2\varepsilon}\; \sigma^2(x)$$

Si noti che il valore di σ non è costante, ma varia con la x, quindi σ=σ(x)

Il valore di σ(x) si può calcolare da D(x) e quindi da E(x): $\sigma(x) = |\bar{D}| = |\varepsilon \bar{E}|$

$V_o = \int_o^{\theta_o} \bar{E} \cdot \bar{dl} = \frac{1}{\varepsilon} \int_o^{\theta_o} D(x) x\, d\theta = \frac{D(x) x\, \theta_0}{\varepsilon}$ da cui:

$$\sigma(x) = D(x) = \frac{\varepsilon V_o}{x\,\theta_0} = \frac{\varepsilon Q_o}{x\,\theta_0 C} = \frac{\varepsilon Q_o}{x\,\theta_0} \frac{\theta_o}{\varepsilon h\, \ln(x_2/x_1)} = \frac{Q_o}{hx\, \ln(x_2/x_1)}$$

$$d\mathcal{E}(dC) = \frac{\theta_o h x dx}{2\varepsilon}\, \sigma^2(x) = \frac{\theta_o h x dx}{2\varepsilon} \left[\frac{Q_o}{hx\, \ln(x_2/x_1)}\right]^2 = \frac{\theta_o Q_o^2}{2\varepsilon} \frac{dx}{hx\, \ln(x_2/x_1)^2}$$

Quindi posso calcolare la forza fra le superfici *hdx*: $\bar{F} = -\nabla \mathcal{E}$; $F_\theta = -\nabla_\theta\, \mathcal{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}(\theta)}{\partial \theta}$

$$F_\theta = -\nabla_\theta\, \mathcal{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{x} \frac{\partial \mathcal{E}(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{Q_o^2}{2\varepsilon} \frac{dx}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \frac{1}{hx^2}$$

La forza per unità di superficie, quindi la pressione, sarà:

$$p(x) = \frac{F_\theta}{hdx} = \frac{Q_o^2}{2\varepsilon} \frac{1}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \left[\frac{1}{hx}\right]^2 = \frac{\sigma^2(x)}{2\varepsilon}$$

Questo valore è massimo per x=x_1 : $p(x_1) = \frac{Q_o^2}{2\varepsilon} \left[\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \;\; \frac{1}{hx_1} \right]^2 = \frac{9\, 10^{-22}}{2\;3{,}6\;\; 8{,}85\;\; 10^{-12}} \left[\frac{1}{\ln 20} \frac{10^6}{5}\right]^2 \cong 0{,}63\;\; Pa$

b2) Metodo alternativo <u>approssimato</u>, quindi non fornisce la risposta corretta: la forza fra le armature del condensatore si può calcolare dal gradiente dell'energia totale:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{Q_o^2}{C} = \frac{Q_o^2}{2}\frac{\theta_o}{\varepsilon h \ln x_2/x_1} \quad ; \quad \bar{F} = -\nabla\mathcal{E} \ ; \ F_\theta = -\nabla_\theta\,\mathcal{E} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{E}(\theta)}{\partial\theta} == -\frac{1}{x}\frac{\partial\mathcal{E}(\theta)}{\partial\theta}$$

Quindi la componente di *F* in direzione θ sarà: $F = \frac{Q_o^2}{2\varepsilon h x\ \ln x_2/x_1}$

questo valore dipende dalla x, il valore massimo della forza, e quindi della pressione, si ha per il valore $x=x_{min}=x_1$.

Per fare una valutazione del valore medio della forza/superficie, si può calcolare il valore medio della forza fra x_1 e x_2:

$< F >= -\frac{Q_o^2}{2\varepsilon h \ln x_2/x_1}\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x} = -\frac{Q_o^2}{2\varepsilon h}\frac{1}{x_2-x_1}$ e la forza media per unità di superficie, quindi la pressione media, sarà:

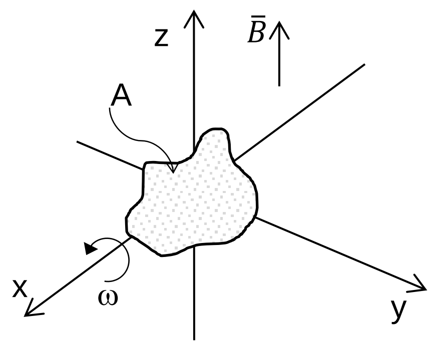
$< p > = \frac{<F>}{h(x_2-x_1)} = -\frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{Q_o}{h(x_2-x_1)}\right]^2 = \frac{<\sigma>^2}{2\epsilon}$ essendo: $< \sigma >= \frac{Q_o}{h(x_2-x_1)} = \frac{30\ 10^{-12}}{5\ 19\ 10^{-6}} = 0{,}31\ 10^{-6}\ C/m^2$

Da cui: $< p >= 1{,}5\ 10^{-2}\ Pa$

Questo valore è giustamente maggiore del valore massimo calcolato precedentemente per $x=x_1$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Una spira piana conduttrice rigida di area ***A*** ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega_0}$ intorno all'asse x. Al tempo t=0 la spira giace nel piano (x,y), vedi figura. Nello spazio è inoltre presente un campo magnetico B variabile nel tempo $\boldsymbol{\bar{B}(t) = B_0 \sin\omega_o t\ \ \hat{z}}$.
Trovare l'espressione della f.e.m. indotta nella spira e calcolarne la frequenza e l'ampiezza massima.



Dati: A=π cm² ; B_o= 10 mT ; ω_0= π· 10³ rad/s

Soluzione

La f.e.m. indotta sarà $f = -\frac{d\phi(B)}{dt}$ il flusso del campo B concatenato con la spira sarà:

$\phi(\bar{B}) = \bar{B}\ \cdot \bar{A} = B_o\ \sin\omega_o t\ \cdot A \cdot \hat{z}\cdot\hat{n} = B_o\ \sin\omega_o t\ \cdot A\cdot\cos\omega_o t$, la f.e.m sarà quindi:

$f = -\frac{d\phi(B)}{dt} = AB_o\omega_o[\cos^2\omega_o t - \sin^2\omega_o t] = AB_o\omega_o[2\ \cos^2\omega_o t\ - 1]$, in alternativa si può calcolare scrivendo il flusso come $\phi(\bar{B}) = B_o\ \sin\omega_o t\ \cdot A\cdot\cos\omega_o t = \frac{AB_o}{2}\sin 2\omega_o t$

$f = -\frac{d\phi(B)}{dt} = \frac{AB_o}{2}2\omega_o\ \cos 2\omega_o t = AB_o\omega_o\ \cos 2\omega_o t$ da cui si ha che la pulsazione è $\omega=2\omega_o$ e la frequenza $f=\omega/2\pi=\omega_o/\pi=10^3$ Hz = 1 kHz.

L'ampiezza sarà: $A\ B_o\ \omega_0$ = 10 mV