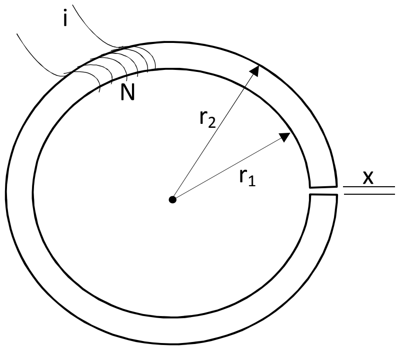
Esercizio n.3 **[10 punti]**



Si consideri un solenoide avvolto su di un anello di sezione quadrata, raggio interno $\boldsymbol{r_1}$, esterno $\boldsymbol{r_2}$, e di permeabilità magnetica relativa $\boldsymbol{\mu_r}$ costante. Il solenoide è costituito da ***N*** spire percorse da una corrente continua ***i***. L'anello s'interrompe per un tratto di lunghezza $\boldsymbol{x<<r_1}$. Scrivere l'espressione del campo d'induzione magnetica $\bar{B}$ in funzione della distanza dal centro dell'anello. Farne un grafico approssimativo, e calcolare il valore di ***B*** in $\boldsymbol{(r_1+r_2)/2}$.

Dati: $\boldsymbol{N=10^3}$; $\boldsymbol{i=5\ A}$; $\boldsymbol{\mu_r=250}$; $\boldsymbol{r_1=5\ cm}$; $\boldsymbol{r_2=6\ cm}$; $\boldsymbol{x=1\ mm}$.

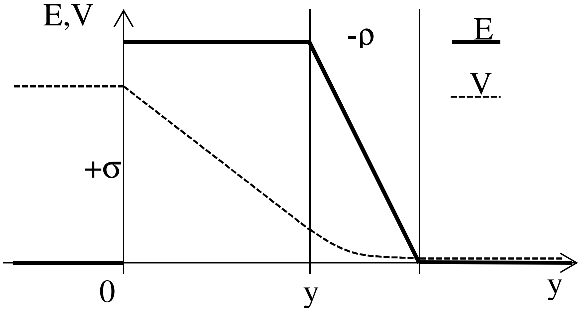
Soluzione

Per un generico valore del raggio r ho $\oint H \cdot dl = H(aria)\cdot x + H(\mu)\cdot(2\pi r - x) = \sum i$ la componente normale di B si conserva, quindi B(aria)=B(μ) , e H(μ)=H(a)/μ , da cui: $H(a)\cdot\left(x+\frac{2\pi r-x}{\mu_r}\right)=Ni$, e B risulta nullo per $r<r_1$ e $r>r_2$ (correnti concatenate nulle, mentre per per $<r_1<r<r_2$:

$$B=\frac{\mu_0\,\mu_r Ni}{2\pi r+x(\mu_r-1)} \text{ che per r=(r1+r2)/2 vale } \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,250\ 10^3\ 5}{2\pi\cdot 5{,}5\cdot 10^{-2}+0{,}249}=2{,}7\ T$$

$$C_2 = 0 \ ; \ C_4 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{(y_0+d)^2}{2d} \ ; C_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{(2y_0+d)}{2} \ ; \ C_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(y_0+\frac{d}{2}\right)$$

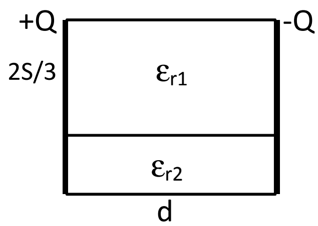
Da cui:
$$\begin{cases} V(1) = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{2y_0}{d}\right) \quad ; \quad V(4)=0 \\ V(2) = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\left(1+2(y_0-y)/d\right) \\ V(3) = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\left(\left(\frac{y}{d}\right)^2 - 2\frac{y}{d}\left(1+\frac{y_0}{d}\right) + \left(1+\frac{y_0}{d}\right)^2\right) = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{y_0-y}{d}\right)^2 \end{cases}$$



Esercizio n.2 [9 punti]

Un condensatore piano isolato è completamente riempito con due lastre dielettriche, vedi figura. Il condensatore è stato caricato con una carica *Q*, la distanza fra le armature è *d* e la loro superficie è *S*. La lastra di costante dielettrica relativa ε_{r1} copre 2/3 della superficie S, mentre quella con costante dielettrica relativa ε_{r2} la parte restante. Calcolare:

a) Il campo Elettrico all'interno del condensatore.
b) La capacità *C*.
c) Il valore delle cariche di polarizzazione.



Dati: *Q=60 pC ; S=3 cm*^{2} *; d=5 mm ;* $\varepsilon_{r1} = 1{,}5$ *;* $\varepsilon_{r2} = 4$

Soluzione

Metodo 1) Il campo elettrico si conserva lungo la componente tangenziale quindi $E_1 = E_2 = E$, da cui si possono calcolare $\frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2}$ e ricordando che $D_j = \sigma_j$, si può scrivere: $Q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = \frac{\sigma_1 2S}{3} + \frac{\sigma_2 S}{3} = \frac{\varepsilon_1}{3}E2S + \frac{\varepsilon_2}{3}ES$, da cui si ha il valore di E:

$E = \frac{3Q}{\varepsilon_0 S}\frac{1}{(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \cong 9{,}6\ kV/m$. La differenza di potenziale è poi: ΔV=E ·d, da cui di può calcolare C:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 S(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{3d} \cong 1{,}25\ pF$$

Metodo 2) La capacità totale si può calcolare come somma delle due capacità parziali $C = C_1 + C_2$; il campo Elettrico si può quindi calcolare da: $E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{Q}{Cd}$

Le cariche di polarizzazione si ottengono dalle relazioni: $Q_{p(1,2)} = \sigma_{p(1,2)} S_{1,2}$; $\sigma_{p(1,2)} = \bar{P}(1,2)\cdot\bar{n}$; $\bar{P}(1,2) = \varepsilon_0 \chi \bar{E}$

Da cui:

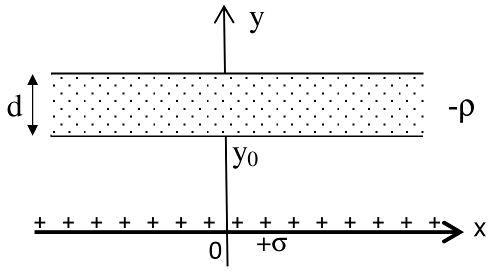
$$Q_{p(1)} = \frac{2}{3}S\sigma_{p1} = -\frac{2S\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)E}{3} = -\frac{2\cdot 3\ 10^{-4}\cdot 8{,}85\ 10^{-12}(1{,}5-1)9{,}6\ 10^3}{3} \cong 8{,}5\ pC$$

$$Q_{p(2)} = \frac{1}{3}S\sigma_{p2} = -\frac{S\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-1)E}{3} = -\frac{3\ \cdot 10^{-4}\ \cdot 8{,}85\ 10^{-12}(4-1)9{,}6\ 10^3}{3} \cong 25{,}5\ pC$$

Esercizio n.1 [11 punti]

Su di un piano infinito posto in *y=0* vi è una densità di carica superficiale uniforme positiva σ. Una carica negativa è distribuita con densità di volume uniforme ρ nella parte di spazio limitata dai piani $y=y_0$ e $y=y_0+d$. Calcolare:

a) Quale valore deve assumere ρ affinché il campo elettrico sia nullo in $y<0$ e $y>y_0+d$.
b) L'andamento del campo elettrico e del potenziale elettrostatico, nelle condizioni trovate nel punto a), per $-\infty<y<\infty$, ponendo $V(y_0+d)=0$. Fare il grafico relativo del campo E e del potenziale V.



Dati: $|\sigma| = 0{,}2\ \mu C/m^2$; $y_0 = 4$ cm ; d= 2 cm.

Soluzione

Il campo può essere calcolato utilizzando il principio di sovrapposizione, sommando quindi i campi generati dal solo piano carico e dal piano carico. Il campo creato dal piano infinito è $\overline{E_\sigma}(y) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\bar{y}}{|y|}$; quello creato dalla distribuzione di volume sarà (vedi problema x.y del libro di testo):

$$\begin{cases} y<y_o \ : \ \bar{E}_\rho = \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\,\hat{y} \\ y>y_o+d : \ \bar{E}_\rho = -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\,\hat{y} \\ y_o<y<y_o+d : \ \bar{E}_\rho = \rho\dfrac{(y_o+d/2)-y}{\varepsilon_0}\,\hat{y} \end{cases}$$

Il campo totale sarà quindi:

$$\begin{cases} zona\ 1) \quad y<0 : \ \bar{E} = \left(-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\right)\hat{y} \\ zona\ 2) \quad 0<y<y_o : \ \bar{E} = \left(\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\right)\hat{y} \\ zona\ 3) \quad y_o<y<y_o+d : \ \bar{E} = \left(\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\rho\dfrac{(y_o+d/2)-y}{\varepsilon_0}\right)\hat{y} \\ zona\ 4) \quad y>y_o+d : \ \bar{E} = \left(\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\right)\hat{y} \end{cases}$$

Nelle zone richieste [1 e 4] il campo E sarà nullo se $\sigma = \rho d$ per cui si avrà:

$$\begin{cases} zona\ 1) \quad y<0 : \ \bar{E} = 0 \\ zona\ 2) \quad 0<y<y_o : \ \bar{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{y} \\ zona\ 3) \quad y_o<y<y_o+d : \ \bar{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[1+\left(y_0-y\right)/d\right]\hat{y} \\ zona\ 4) \quad y>y_o+d : \ \bar{E} = 0 \end{cases}$$

Il valore di V si ha dalla relazione $V(y) = -\int E dy$ quindi:

$$\begin{cases} zona\ 1) \quad y<0 : \ V(1) = costante = C_1 \\ zona\ 4) \quad y>y_o+d : \ V(4) = costante = C_2 \\ zona\ 2) \quad 0<y<y_o : \ V(2) = -\displaystyle\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dy = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}y + C_3 \\ zona\ 3) \ : \ V(3) = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[y\left(1+\dfrac{y_o}{d}\right)-\dfrac{y^2}{2d}\right]+C_4 \end{cases}$$

Imponendo, come dice il testo, che V(4)=0, e che ci sia il raccordo fra V(4) e V(3) ,poi V(3) e V(2), e V(2) e V(1), si ricavano le 4 costanti.