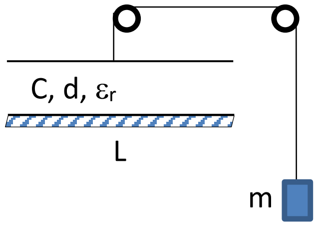
Esercizio n.1 [9 punti]

Un condensatore piano ideale, con le superfici quadrate di lato ***L*** e riempito di un dielettrico liquido di costante dielettrica ε_r, ha una capacità ***C***. La faccia inferiore del condensatore è fissa, mentre quella superiore è mobile in senso verticale, collegata tramite due carrucole e un filo (ideali) ad una massa ***m***. Calcolare la differenza di potenziale che è necessario dare al condensatore perché il sistema rimanga in equilibrio mantenendo fra le armature la distanza d relativa alla capacità C.



Dati: L= 21 cm ; C= 1 nF ; ε_r= 2,6 ; m= 10 g

Il sistema lavora a tensione costante, le sua energia sarà quindi $U = -\frac{1}{2}CV^2 = -\frac{\varepsilon S V^2}{2x}$ dove $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

E la forza $F = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\varepsilon S V^2}{2x^2}$ che per x=d deve equilibrare la forza peso, quindi $\frac{\varepsilon S V^2}{2d^2} = mg$ da cui:

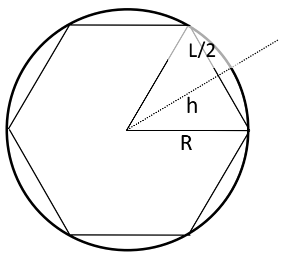
$$V^2 = mg\frac{2d^2}{\varepsilon S} \quad \text{e} \quad \therefore\ V = d\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon S}} \quad \text{oppure:} \quad V = \sqrt{\frac{2mgd}{C}} = \frac{L}{C}\sqrt{2mg\varepsilon} =$$

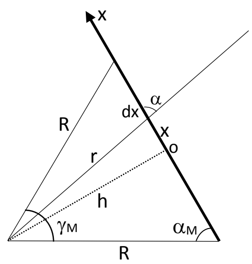
$$= \frac{0{,}21}{10^{-9}}\sqrt{2\cdot 10^{-2}\, 9{,}8\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}6} = 446\ V$$

Esercizio n.2 [11 punti]

Si consideri un poligono regolare di ***N*** lati, inscritto in una circonferenza di raggio ***R***, percorso da una corrente costante ***i***. Scrivere l'espressione del campo magnetico H(i) al centro del poligono in funzione del numero N di lati. Calcolarla nel caso dell'esagono. Calcolare l'espressione del campo H al centro dovuto alla circonferenza circoscritta come limite nel caso di N tendente ad infinito.

Dati: R= 3,14 cm ; i= (1/√3) A





Il campo al centro sarà la somma dei campi generati dagli N lati del poligono. Il campo generato da un lato va calcolato integrando i contributi dei campi elementari generati dal segmento infinitesimo dx (vedi figura). Il Lato L NON sta tutto alla stessa distanza dal centro, quindi non si può calcolare inserendo semplicemente h oppure R nella formula.

$$\mathrm{dH}(\mathrm{i},\mathrm{dx}) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\frac{\overline{\mathrm{dx}}\times\bar{\mathrm{r}}}{|\bar{\mathrm{r}}|^3} = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\frac{\mathrm{dx}\cdot\sin\alpha}{\mathrm{r}^2}$$

Quindi da: $\mathrm{x} = \mathrm{h}\cot\alpha$; $\mathrm{dx} = -\mathrm{h}\frac{\mathrm{d}\alpha}{(\sin\alpha)^2}$; $\mathrm{h} = \mathrm{r}\ \sin\alpha$, si ha: $\mathrm{dH} = -\frac{\mathrm{i}}{4\pi\mathrm{h}}\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha$ che integrato dal punto 0 all'estremo di L/2 dà: $\mathrm{H}\left(0,\frac{\mathrm{L}}{2}\right) = \int_{\pi/2}^{\alpha_M}\mathrm{dH} = \frac{\mathrm{i}}{4\pi\mathrm{h}}\cos\alpha_M$ essendo α_M il massimo valore dell'angolo α quando x=L/2

Il campo totale al centro sarà quindi (2 volte H(L/2) per N lati): $\therefore\ \mathrm{H(NL)} = \frac{\mathrm{Ni}}{2\pi \mathrm{h}}\cos\alpha_\mathrm{M} = \frac{\mathrm{Ni}}{2\pi \mathrm{R}}\cot\alpha_\mathrm{M} = \frac{\mathrm{Ni}}{2\pi \mathrm{R}}\tan\frac{\pi}{\mathrm{N}}$ avendo considerato che :

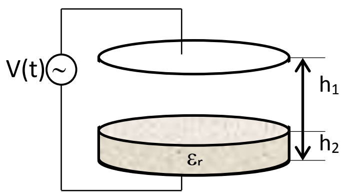
$\gamma_\mathrm{M} = \pi - 2\alpha_\mathrm{M} = \frac{2\pi}{\mathrm{N}}$ e: $\mathrm{h} = \mathrm{R}\sin\alpha_\mathrm{M} = \mathrm{R}\cos(\pi/\mathrm{N})$

Nel caso dell'esagono ho quindi $\therefore\ H(6) = \frac{6i}{2\pi R}\tan\frac{\pi}{6} = \frac{3i}{\pi R}\tan 30^0 = \frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/3}{\pi\cdot\pi\cdot 10^{-2}} \cong 10\ \mathrm{A/m}$

Per N→∞ si ha che $\tan\frac{\pi}{N} \cong \frac{\pi}{N}$, quindi $\therefore\ H(\infty) = \frac{Ni}{2\pi R}\tan\frac{\pi}{N} = \frac{Ni}{2\pi R}\frac{\pi}{N} = \frac{i}{2R} \cong 9{,}2\ \mathrm{A/m}$ come doveva venire.

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un condensatore ad armature piane e circolari, di raggio a, è alimentato da una tensione variabile $V(t)= V_0 \cos(\omega t)$. Tra le armature è inserito un dielettrico, di costante dielettrica relativa ε_r, che occupa una parte h_2, mentre nella parte h_1 c'è il vuoto.
Scrivere le espressioni della densità di corrente di spostamento all'interno del condensatore e calcolarne il valore efficace.



Dati: ***ε_r=1,7 ; h_1= 3 mm ; h_2= 1 mm ; V_0= 3 V ; ω= 10^6 rad/s .*** *Si assuma $h_1+h_2<<a$.*

La componente perpendicolare alle superfici del vettore $\overline{D}$ si conserva, quindi $D_1=D_2$ (volendo si poteva calcolarlo applicandi il teorema di gauss ad un cilindro che fosse parte in 1 e parte in 2, con le superfici di base parallele alle superfici del condensatore.

$D_1 = D_2$ quindi $E_1 = \varepsilon_r E_2$ inoltre di ha che la tensione totale è uguale alla somma della tensione ai capi di 1 e di 2: $V = V_1 + V_2 = E_1 h_1 + E_2 h_2$ da queste due relazioni si possono calcolare le esperessioni dei due campi elettrici: $E_1 = \frac{\varepsilon_r V}{\varepsilon_r h_1 + h_2}$; $E_2 = \frac{V}{\varepsilon_r h_1 + h_2}$ da questi si può calcolare la dnrsità della corrente di spostamento:

$\therefore J_{1,2} = \frac{\partial D_{1,2}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\varepsilon_r h_1 + h_2}\omega V_0 \cos\omega t$ il cui valore efficace è $\therefore J_{eff} = \frac{Jmax}{\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\varepsilon_r h_1 + h_2}\frac{\omega V_0}{\sqrt{2}} = 5{,}2\ mA/m^2$