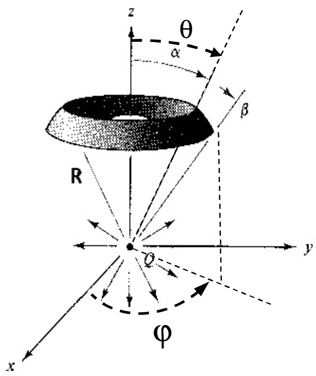
Esercizio n.1 [8 punti]



Una carica puntiforme Q è posta nell'origine di un sistema di coordinate sferiche [vedi figura]. Calcolare il flusso del campo Elettrico che attraversa la porzione di superficie sferica limitata da $\alpha \le \theta \le \beta$. Calcolare inoltre il flusso per $\alpha_1=0$ e $\beta_1=\pi$.

Dati: da $\alpha = 30^0$; $\beta = 40^0$; Q = 1 nC

Soluzione

Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie indicata S compresa fra α e β, sarà una frazione del flusso totale attraverso la superficie sferica che racchiude tutta la carica a distanza R. Il flusso totale attraverso una superficie sferica sarà:

$\phi(E)_{TOT} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, mentre il flusso attraverso la superficie S sarà $\phi(E)_S = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{S}{4\pi R^2}$. La superficie S limitata da α e da β è $S = \iint dS = \iint_{\varphi=0;\,\theta=\alpha}^{\varphi=2\pi;\,\theta=\beta} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi R^2(\cos\alpha - \cos\beta)$.

Il flusso richiesto è quindi:

$$\phi(E)_S = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{2\pi R^2(\cos\alpha - \cos\beta)}{4\pi R^2} = \frac{Q}{2\epsilon_0}(\cos\alpha - \cos\beta) = \frac{10^{-9}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}(0{,}866 - 0{,}766) \cong 5{,}65\ V \cdot m$$

Il caso per $\alpha_1=0$ e $\beta_1=\pi$ è quello della superficie sferica totale, il cui flusso relativo è: $\phi(E)_{TOT} = \frac{Q}{\epsilon_0} \cong 113\ V \cdot m$

Esercizio n.2 [12 punti]

Si consideri un condensatore cilindrico con raggi r_1 e r_2 [$r_1 < r_2$], altezza L e carica Q_0. Lo spazio fra le armature, inizialmente vuoto, viene riempito con un materiale plastico di resistività elettrica ρ. Si supponga che l'inserzione sia istantanea al tempo t=0. Si calcoli il valore della carica elettrica posseduta da una qualunque delle armature del condensatore al tempo t = 1s, e le espressioni del campo Elettrico, della densità della corrente di spostamento e del campo magnetico, durante il processo di scarica, all'interno del condensatore.

Si assuma r_1, r_2 << L. Dati: Q_0 = 1 μC ; ρ = 10^{13} Ω·m

Il sistema è un condensatore con perdite, equivalente ad un circuito RC che si scarica. Non viene fornito il valore della costante dielettrica relativa ε_r, la si consideri pari a 1 (non cambia né la fisica, né quanto avviene) . Il condensatore è cilindrico, quindi $C = \frac{2\pi\,\varepsilon_0 L}{\ln r_2/r_1}$ mentre la resistenza, che si può calcolare come serie delle corone di cilindriche di resistenze di raggio r, spessore dr, e altezza L:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} dR = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho}{2\pi L}\frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln r_2/r_1$$

La costante di tempo del circuito sarà quindi $\tau = RC = \rho\varepsilon_0 = 88{,}5\ s$ [se volessi considerare la costante dielettrica verrebbe un tempo > 88 s]

La carica scenderà nel tempo con la legge di scarica del condensatore: $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ che per t=1 s << τ vale Q(1s) $\cong$ Q_0 = 1 μC.

Il campo Elettrico all'interno di un condensatore cilindrico è: $\bar{E}(t) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\frac{\hat{r}}{r} = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon_0 L}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\frac{\hat{r}}{r}$

La densità della corrente di spostamento sarà:

$$\bar{J}_s = \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = \frac{Q_0}{2\pi L}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\frac{\hat{r}}{r}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{\bar{E}(t)}{\rho}$$

Il campo B è legato alle correnti che scorrono nel circuito dalla equazione di Maxwell:

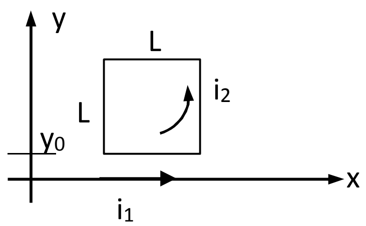
$rot\ \bar{B} = \mu_0(\bar{J}_s + \bar{J}_c)$ dove $\bar{J}_c$ è la densità della corrente di conduzione, legata al campo Elettrico dalla $\bar{J}_c = \frac{\bar{E}(t)}{\rho}$

Si ha quindi che $\bar{J}_s + \bar{J}_c = 0$, quindi $rot\ \bar{B} = 0$ che unito alla $div\ \bar{B} = 0$ ha come soluzione $\bar{B} = 0$.

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Sia dato un filo rettilineo indefinito, percorso da una corrente stazionaria i_1, ed una spira quadrata di lato L, percorsa da una corrente stazionaria i_2 [vedi figura, non in scala]. Si calcoli il coefficiente di mutua induzione fra i due circuiti in funzione della distanza y_0, e la forza che si esercita fra i due circuiti (in modulo e verso) quando y_0 = 0,5 cm.

Dati: i_1= 3 A ; i_2= 1/3 A ; L= 2 cm.



Il coefficiente di mutua induzione è $M_{12} = \frac{\phi_{12}}{i_1} = \frac{\phi(i_1)_2}{i_1}$ mentre il campo magnetico creato dal filo infinito nel piano della spira quadrata è:

$\bar{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{y}\hat{z}$, il flusso ϕ_{12} sarà quindi: $\phi_{12} = \int_{S_2}\bar{B}_1\cdot\hat{n}dS_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}i_1 L\ln\frac{y_0+L}{y_0}$

E il coefficiente di mutua induzione: $M_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}L\ln\frac{y_0+L}{y_0} = 6{,}4\ nH$

Per il calcolo della forza si può utilizzare la relazione: $\bar{F} = grad\ U = grad\ (\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2)$

In cui l'unica dipendenza da una coordinata si ha nel terzo termine, per cui:

$\bar{F} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_0}{2\pi}i_1 i_2 L\ln\frac{y+L}{y}\ \hat{y}\right) = -\frac{\mu_0}{2\pi}i_1 i_2\frac{1}{y_0}\frac{L^2}{y_0+L}\ \hat{y} = -6{,}4\cdot 10^{-7}\quad \hat{y}$ [N]. La forza è attrattiva.

Lo stesso risultato si può ottenere calcolando la somma delle forze esercitate dal filo sui quattro lati, che sono nulle per i lati perpendicolari al filo, mentre la forza è attrattiva per il tratto parallelo più vinco, mentre è repulsiva per quello più lontano, con una dipendenza che va come 1/y.