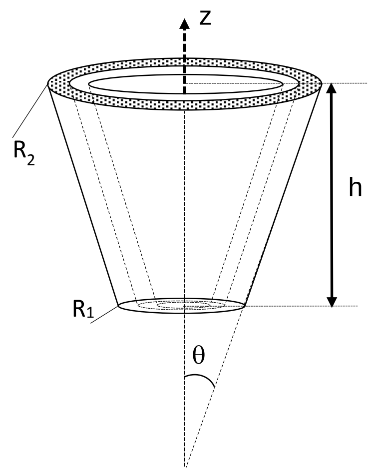
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Un condensatore è composto da un tronco di cono cilindrico di raggi iniziali e finali R_1 ed R_2 , con la superficie laterale che forma un angolo θ con l'asse del cono (vedi figura). Internamente vi sono due materiali dielettrici di spessore δ_1 e δ_2 entrambi molto minori di R_1. Le due armature conduttrici sono le due superfici coniche interne ed esterne al sistema.

La parte più interna (**δ_1**) ha come dielettrico il vuoto, mentre quella più esterna (**δ_2**) è composta da un dielettrico con costante dielettrica relativa ε_2.

Calcolare la capacità del condensatore. Il disegno non è in scala.

***Dati:* R_1 *= 10 cm ;* R_2*=2* R_1 *;* δ_1 *= 1mm ;* $\delta_2 = 2\delta_1$ *;* $\varepsilon_2 = 2$ *;* $\theta = 10^0$**



Soluzione

Metodo A: Il valore della capacità può essere calcolato integrando la capacità infinitesima di una sezione alta dz del tronco di cono (assumendo come z l'asse verticale, con origine nel piano R_1), in questo caso ho, per un generico dielettrico di costante dielettrica ε_r:

$$dC = \varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{dS}{\delta} = \varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{dl \cdot 2\pi R}{\delta}, \qquad \text{dove:} \quad dl = \frac{dz}{\cos\theta} \qquad \text{e:} \quad R = R_1 + z\tan\theta$$

Integrando dC fra z=0 e z=h=(R_2-R_1)/tg θ ho: $C = \int_0^h dC = \frac{\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\delta\sin\theta}(R_2^2 - R_1^2) = A\frac{\varepsilon_r}{\delta}$ dove $A = \frac{\pi\varepsilon_0}{\sin\theta}(R_2^2 - R_1^2) = \varepsilon_0 S$, essendo S la superficie laterale (vedi metodo B).

Le due capacità sono in serie, la capacità totale sarà quindi:

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1} = \frac{\delta_1}{A\varepsilon_1} + \frac{\delta_2}{A\varepsilon_2} = \frac{1}{A}\frac{\varepsilon_2\delta_1 + \varepsilon_1\delta_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \qquad \text{da cui:} \quad C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\sin\theta}(R_2^2 - R_1^2)\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\delta_1 + \varepsilon_1\delta_2} \cong \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}{\theta}\frac{2}{4\delta_1} = 3{,}2 \text{ nF}$$

Avendo usato l'approssimazione $\sin\theta \cong \theta = \frac{2\pi}{360^0}10^0 = \frac{\pi}{18}$.

Metodo B: La capacità del condensatore può essere calcolata considerandolo come un condensatore piano, con un piccolo spessore δ fra le armature, di superfice uguale alla superficie laterale S del tronco di cono.

La superficie laterale del tronco di cono (esatta) è $S = \pi L(R_2 + R_1)$, dove L è la lunghezza della generatrice, $L = \frac{R_2 - R_1}{\sin\theta}$

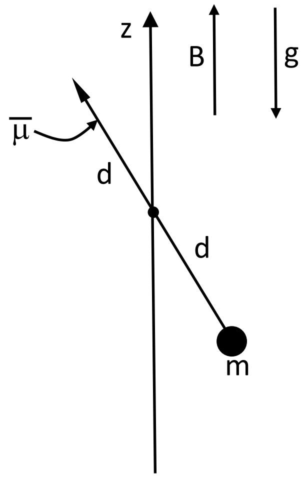
Chi avesse utilizzato lo sviluppo, approssimato, della superficie laterale come la superficie di un trapezio di altezza h e basi minore e maggiore $2\pi R_1$ e $2\pi R_2$, avrebbe fatto un errore relativo legato all'angolo θ, dell'ordine di $\theta^2/2$, quindi trascurabile.

Metodo C: Si può uguagliare l'energia potenziale di tutto il condensatore $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{(\sigma S)^2}{2C}$ alla somma della densità di energia dei due condensatori per i relativi volumi: $E = \left(\frac{1}{2}D_1E_1S\delta_1\right) + \left(\frac{1}{2}D_2E_2S\delta_2\right)$, dove $D_i = \sigma = \text{costante} = \varepsilon_i\varepsilon_0E_i$.

Valgono, per quel che riguarda il calcolo della superficie laterale S, le considerazioni fatte al punto precedente.

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Nello spazio vuoto, in presenza di gravità, è posta una sbarretta di lunghezza **2d** dotata di momento magnetico **μ**, con ad un estremo una massa **m**. La sbarretta è incernierata per il punto centrale e può ruotare intorno all'asse verticale z. La massa della sbarretta è trascurabile rispetto a quella della massa m. In tutto lo spazio è presente un campo B, costante ed uniforme, in direzione verticale (vedi disegno).



Si chiede di calcolare l'espressione ed il valore della pulsazione delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

Dati: d = 5 cm ; μ = 10^{-4} A m^2 ; m = 20 g ; B = 1 T

Soluzione

Il sistema è sottoposto a due momenti, quello dovuto all'interazione momento magnetico- Campo B e quello dovuto alla forza peso sulla massa m. Indicando con θ l'angolo fra l'asse z e la sbarretta, in verso antiorario, e con y l'asse che esce dal foglio, i due momenti si scrivono:

$\bar{M}_B = \bar{\mu} \times \bar{B} = -\mu B \sin\theta\ \hat{y}$ $\quad \bar{M}_g = \bar{r} \times m\bar{g} = -mgd \sin\theta\ \hat{y}$ quindi:

$\bar{M} = -(\mu B + mgd)\sin\theta\ \hat{y} \cong -(\mu B + mgd)\,\theta\hat{y} = -k\theta\hat{y}$, l'equazione del moto sarà quindi:

$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} \quad ossia\text{: } I\ddot{\theta} + k\theta = 0$, I essendo il momento di inerzia della massa m : $I = md^2$

Questa equazione è l'equazione di un moto armonico di pulsazione

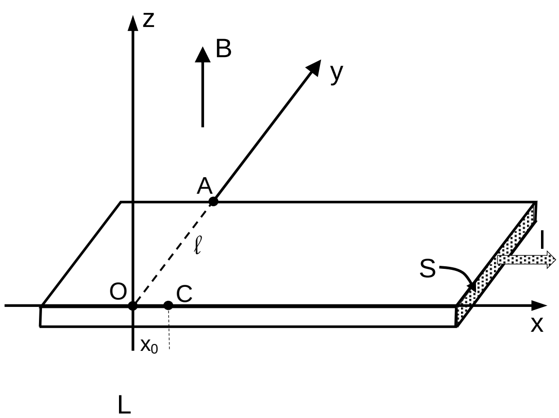
$\omega^2 = \frac{k}{I} = \frac{\mu B + mgd}{md^2} = \frac{10^{-4}\cdot 1 + 20\cdot 10^{-3}\cdot 10 \cdot 5\cdot 10^{-2}}{md^2} = \frac{10^{-4} + 10^{-2}}{md^2}$ Il termine dovuto a B è trascurabile, la pulsazione quindi sarà: $\omega^2 \cong \frac{mgd}{md^2} = \frac{g}{d}$ cioè quella del pendolo semplice, $\omega = \sqrt{\frac{g}{d}} = \sqrt{\frac{10}{5\cdot 10^{-2}}} = \sqrt{2\cdot 10^2} = 14\ rad/s$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

In uno spazio vuoto, in cui è presente un campo ***B*** costante ed uniforme diretto lungo l'asse z, è disposta una striscia rettangolare di un materiale conduttore di sezione ***S*** e larghezza ℓ attraversata da una corrente costante ed uniforme ***I***, (vedi figura).

Il materiale conduttore ha resistività ρ e numero di portatori per unità di volume ***n***. Calcolare la differenza di potenziale esistente fra i punti ***A*** e ***C***. Il punto ***C*** dista x_0 dall'origine ***O***.

Nota: il disegno non è in scala.



Dati: B = 8 T ; I = 4 A ; S = 10^{-5} m^2 ; ℓ = 1 cm ; OC = x_0 = ℓ/10 ;
ρ = $2\cdot 10^{-8}$ Ω·m ; n = 10^{29} m^{-3}.

Soluzione

La differenza di potenziale fra i punti A e C è dovuta a due diversi effetti: la forza di Lorentz che produce una differenza di potenziale fra i punti A e O, e la caduta di potenziale resistiva fra o e C, quindi:
$V_A - V_c = (V_A - V_o) + (V_o - V_c)$

$(V_A - V_o)$:
La forza di Lorentz produce un campo Elettrico $\bar{E}_L = \frac{\bar{F_L}}{q} = \bar{v} \times \bar{B} = -vB\hat{y} = -\overline{E_s}$ quindi

$$\mathrm{V_A - V_0} = \int_A^0 \overline{\mathrm{E_s}} \cdot \overline{\mathrm{dl}} = -\mathrm{vBl}$$

Dato che J=nqv=I/S si ha che v=I/nqS, quindi

$$\mathrm{V_A - V_0} = -\frac{\mathrm{I}}{nqS}\mathrm{Bl}$$

$(V_o - V_c)$:
La legge di Ohm si scrive: $(V_o - V_c) = RI = \rho\, x_0/S \cdot I$

Quindi $V_A - V_C = \rho \frac{x_0}{S} I - \frac{\mathrm{I}}{nqS}\mathrm{Bl} = \frac{I}{S}\left[\rho x_0 - \frac{\mathrm{Bl}}{nq}\right] = \frac{I}{S}\left[\rho \frac{l}{10} - \frac{\mathrm{Bl}}{nq}\right] = \frac{I \cdot l}{S}\left[\rho \frac{1}{10} - \frac{\mathrm{B}}{nq}\right] =$

$$V_A - V_C = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{10^{-5}}\left[2 \cdot 10^{-9} - \frac{8 \cdot 10^{-2}}{10^{29} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}\right] = 4 \cdot 10^3 \left[2 \cdot 10^{-9} - \frac{8}{1{,}6} \cdot 10^{-12}\right]$$

Il secondo termine dentro la parentesi è circa mille volte minore del primo, quindi è trascurabile: $V_A - V_C = 8\ \mu V$

NOTA: tutti i calcoli possono essere fatti con un'approssimazione del 10%. Quindi g = 10 m/s^2 , e se si trovasse un'espressione del tipo A+B con uno dei due termini molto più piccolo dell'altro, si può trascurare il minore dei due.