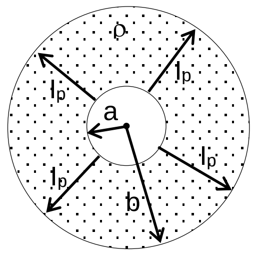
Esercizio n.1 [10 punti]

Un cavo coassiale cilindrico lungo ℓ è composto da un conduttore interno di raggio **a** e da una sottile superficie cilindrica esterna conduttrice di raggio **b**. Fra i due conduttori è presente un (cattivo) isolante con resistività elettrica **ρ**. Quando il cavo è percorso da una certa corrente, si ha una corrente di perdita $\mathbf{I_p}$ fra l'interno e l'esterno. Calcolare la differenza di potenziale, dovuta all'isolante, che si crea fra i due conduttori.



Dati: $\mathbf{l = 2\pi\ \boldsymbol{m}}$; $\mathbf{a = 1\ \boldsymbol{mm}}$; $\mathbf{b = e^2\ \boldsymbol{mm}}$; $\boldsymbol{\rho = 10^{10}\ \Omega \cdot m}$; $\mathbf{I_p = 2\ \boldsymbol{nA}}$

Il problema può essere risolto in due modi, calcolando il campo Elettrico, oppure la resistenza del cilindro.

A) $\Delta V = -\int_b^a E dr \quad essendo\ E = \rho J\ \ e\ \ J(r) = \frac{I_p}{S(r)} = \frac{I_p}{2\pi(r)l}$

Quindi $\Delta V = -\int_b^a \frac{\rho I_p}{2\pi r l} dr \quad = \frac{\rho I_p}{2\pi l} \ln\frac{b}{a} = \frac{10^{10}\ 2\ 10^{-9}}{2\pi\ 2\pi} \ln e^2 \cong 1\ Volt$

B) $\Delta V = RI$ dove R è la resistenza radiale totale.

R può essere calcolata in due modi:

1) come il parallelo dei dischi di spessore dl, ogni disco come il parallelo dei settori di circonferenza di ampiezza dα e il settore come serie delle corone circolari di spessore dr

Si ha quindi $R_{settore} = \int_a^b \frac{\rho I_p}{d\alpha dl}\frac{dr}{r} = \frac{\rho I_p}{d\alpha dl} \ln\frac{b}{a}$

$$R_{disco}^{-1} = \int_0^{2\pi} R_{settore}^{-1} = \frac{2\pi\ dl}{\rho\ \ln {}^{b}/_{a}}$$

$R^{-1} = \int_0^l R_{disco}^{-1} = \frac{2\pi\ l}{\rho\ \ln {}^{b}/_{a}}$ da cui si ha che $R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\frac{b}{a}$ e la differenza di potenziale viene lo stesso valore calcolato con il metodo A.

2) Oppure si può calcolare la resistenza come serie della Resistenza infinitesima di una sottile corona cilindrica di raggio r, spessore dr e lunghezza l. il risultato ovviamente non cambia.

Esercizio n.2 [10 punti]

Un condensatore piano di superficie S e distanza fra le armature d è collegato ad un generatore di tensione ideale di tensione alternata $V(t)=V_0 \sin(\omega t)$. Dentro il condensatore è presente un dielettrico reale di costante dielettrica relativa ε_r e resistività ρ. Determinare la pulsazione ω della tensione applicata per cui i valori efficaci (rms) delle densità di corrente di conduzione e di spostamento all'interno del condensatore assumono lo stesso valore.

Dati: ε_r = 1,13 ; $\rho = 10^{10}$ $\Omega \cdot m$.

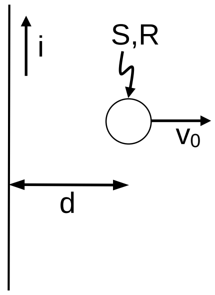
Il materiale dielettrico che sta all'interno del condensatore viene attraversato da una corrente di conduzione attraverso la parte resistiva e da una corrente di spostamento attraverso lo stesso materiale.
Abbiamo quindi: per la densità della corrente di conduzione: $|\bar{J}_c| = \frac{I}{S} = \frac{V}{RS} = \frac{V_0 \sin\omega t}{\rho d}$ mentre per la densità della corrente di spostamento: $|\bar{J}_s| = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{d}\frac{\partial V_0 \sin\omega t}{\partial t} = \frac{\varepsilon\, V_0 \omega \cos\omega t}{d}$

I valori efficaci sono $1/\sqrt{2}$ del valore massimo della funzione sinusoidale, quindi si ha: $\frac{V_0}{\rho d} = \frac{\varepsilon V_0 \omega}{d}$ che risultano uguali quando

$$\omega = \frac{1}{\varepsilon\rho} = \frac{1}{1{,}13 \cdot 8{,}85\ 10^{-12} \cdot 10^{10}} \cong 10\ rad/s$$

Esercizio n.3 [10 punti]

Si consideri un filo infinito percorso da una corrente costante i ed una piccola spira circolare, di superficie S e resistenza elettrica R, posta con l'asse perpendicolare al filo nella posizione d. Si calcoli il lavoro necessario per portare la spira con velocità costante v_0 dalla posizione d fino all'infinito, muovendosi in direzione perpendicolare al filo [vedi figura].



[il disegno non è in scala]

Dati: i = 20 *A* ; S = 1 *cm²* ; R = 1 *mΩ* ; d = 10 *cm* ; v_0 = 3 *m/s*

La spira vede il campo B prodotto dal filo, quindi vede un flusso di B variabile con la posizione e nel tempo, questa variazione provoca una f.e.m. indotta che fa scorrere una corrente nella spira. Il lavoro necessario per spostare la spira è pari all'energia dissipata per effetto Joule nella spira per tutta la durata del processo considerato.
Il flusso di B concatenato con la spira è: $\phi(\bar{B}) = \bar{B}(r) \cdot \bar{S} = B(r)S = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i \cdot S}{r}$ avendo indicato con r la distanza dall'asse del filo. $f = -\frac{d\phi(\bar{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 i \cdot S}{2\pi}\frac{d}{dt}\frac{1}{r(t)} = \frac{\mu_0 i \cdot S}{2\pi}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0 i \cdot S}{2\pi}\frac{1}{r^2}v_0$ sapendo che r=d+vt.

L'energia dissipata sarà quindi: $E = \int W dt = \int_0^\infty \frac{f^2}{R} dt = \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 i \cdot S}{2\pi}\ v_0\right]^2 \int_0^\infty \frac{1}{r^4}\ dt\ = \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 i \cdot S}{2\pi}\right]^2 \frac{v_0}{3d^3} = 1{,}6\ 10^{-13}\ \ J$

Un metodo alternativo è quello di utilizzare la relazione $\bar{F} = (\bar{m} \cdot \bar{\nabla})\bar{B}\ \ e\ \ E = \int_d^\infty \bar{F} \cdot d\bar{r}$, ma è di non facile utilizzo. Se usata correttamente fornisce lo stesso risultato.