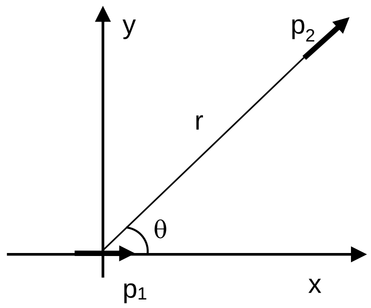
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Nello spazio vuoto sono posti due dipoli elettrici uguali $|p_1|=|p_2|=qd$ come in figura, in cui il dipolo p_2 è posto ad una distanza r>>d. Calcolare il momento della forza che agisce sul dipolo p_2 e l'angolo φ per cui questo momento è massimo.

Dati: $|p_1|=|p_2|=p=1{,}4\cdot 10^{-10}$ ***C·m***, $\theta=\pi/4$, ***r = 1cm.***



Soluzione

Scegliamo un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z) con l'origine nel centro del dipolo p_1 e con l'asse z diretto come l'asse z delle coordinate cartesiane (x,y,z).
Il momento della forza che agisce sul dipolo p_2 è:
$\overline{M}=\overline{p_2}\times\overline{E}$, vediamo quindi calcolare il campo elettrico dovuto a p_1, tramite la relazione $\overline{E}=-\overline{\nabla}V(r,\theta)$.

Il potenziale di un dipolo, a grande distanza dal centro, scritto in coordinate polari (r, θ), vale:

$$V(r,\theta)=k\cdot\frac{\overline{p}\cdot\overline{r}}{r^3}=\frac{k\,p\cos\theta}{r^2}\ \ ,\ \ \text{dove}\ \ k=1/4\pi\varepsilon_0\cong 9\cdot 10^9\quad N/m^2C^2$$

Le componenti del campo Elettrico saranno quindi:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r}=-k\,p\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)=\frac{2k\,p\cos\theta}{r^3}\\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=-\frac{1}{r}\frac{kp}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta)=\frac{k\,p\,\text{sen}\,\theta}{r^3}\end{aligned}\qquad (1)$$

NOTA: il campo Elettrico generato dal dipolo 1 in r,θ ha **sia** la componente r **che** la componente θ (oppure sia la componente x che la componente y), che ha calcolato solo la compente r ha sbagliato.
Il campo E(r,θ) quindi produce un momento sul secondo dipolo pari a:

$$\overline{M}=\overline{p_2}\times\overline{E}=\begin{vmatrix}\hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z}\\ p & 0 & 0\\ E_r & E_\theta & 0\end{vmatrix}=(p\cdot E_\theta)\hat{z}=\frac{kp^2\,\text{sen}\,\theta}{r^3}\hat{z}\cong\frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-20}}{10^{-6}}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}\cong 12{,}3\cdot 10^{-5}\,\hat{z}\quad [\text{Nm}]$$

Il problema può essere risolto anche scrivendo le espressioni delle componenti dei due dipoli, del campo elettrico e del Momento in coordinate cartesiane (x,y,z). Il calcolo è un po' più laborioso:

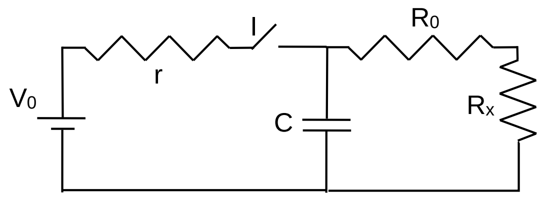
$$\begin{cases} E_{r,x}=E_r\ \cos\theta\ \ ;\ \ E_{r,y}=E_r\ \sin\theta\\ E_{\theta,x}=-E_\theta\sin\theta\quad ;\ \ E_{\theta,y}=E_\theta\ \cos\theta\end{cases}$$ dove E_r e E_θ si hanno dalle (1) mentre: $\bar{p}_2=(p\ \cos\theta)\hat{x}+(p\ \sin\theta)\hat{y}$

Il momento ovviamente sarà lo stesso:

$$\overline{M}=\overline{p_2}\times\overline{E}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ p\cos\theta & p\sin\theta & 0\\ E_x & E_y & 0\end{vmatrix}=p\big(\cos\theta\cdot E_y-\sin\theta\cdot E_x\big)=\cdots=(p\cdot E_\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,\hat{z}=p\cdot\frac{k\,p\,\text{sen}\,\theta}{r^3}\hat{z}$$

Il momento M è massimo per θ = π/2, quindi quando i due dipoli sono perpendicolari.

Esercizio n.2 **[10 punti]**



Sia dato il circuito in figura, dove V_0 , r rappresentano un generatore reale di f.e.m. con resistenza interna r. Al generatore sono collegati tramite l'interruttore I, un condensatore ideale, inizialmente scarico, di capacità C e due resistenze di valore R e R_x. Al tempo t=0 l'interruttore viene chiuso. Dopo un tempo sufficientemente lungo il sistema si troverà in condizioni stazionarie. Si chiede di calcolare, in queste condizioni, il valore di R_x per cui la potenza elettrica dissipata in essa è massima, e il valore di questa potenza.

Opzionale [+ 2punti]: utilizzando il valore di R_x trovato calcolare il τ del circuito.

Dati: $V_0 = 8$ V , $r = 14\ \Omega$, $R_0 = r/3$, C= 40 mF

Soluzione

All'inizio il condensatore inizia a caricarsi, quando il condensatore è carico non passerà più corrente attraverso di esso, e non parteciperà al processo di dissipazione.

La potenza dissipata in R_x è $W= I^2(R_x)\cdot R_x$.

La corrente attraverso R_x è: $I(R_x) = \frac{V_0}{r+R_0+R_x}$, la potenza dissipata sarà quindi: $W(R_x) = I^2 R_x = \frac{V_0^2 R_x}{\left(r+\frac{r}{3}+R_x\right)^2} = \frac{9V_0^2 R_x}{(4r+3R_x)^2}$

Il massimo si ha per: $\frac{\partial W}{\partial R_x} = 0$ quindi, svolgendo il calcolo, si ha il massimo per $R_x = \frac{4}{3} r$

In questo caso la potenza in R_x sarà: $W(R_x) = \frac{9V_0^2 4r/3}{(4r+4r)^2} = \frac{6}{7}\ W \cong 0{,}85\ W$

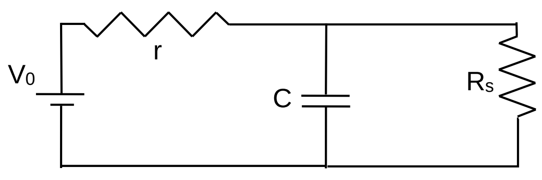
Parte opzionale:

Con il valore di R_x trovato il circuito è il seguente (vedi figura), dove $R_s = R_0 + R_x = 5/3\ r$ è la serie delle due resistenze R_0 e R_x:

In questo caso si può risolvere il circuito con il metodo delle maglie, scrivendo le correnti attraverso r e R_s e la tensione $V_c(t)$ ai capi del condensatore; svolgendo il calcolo si trova che il τ del circuito è uguale a:

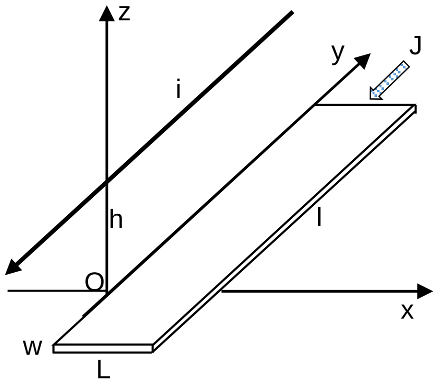
$\tau = RC$, dove $R = r // R_s = \frac{rR_s}{r+R_s} = \frac{5}{8} r = \frac{35}{4}\Omega$ quindi si ha: τ= 0,35 s

L'esercizio è identico ad uno degli esempi svolti nel libro di testo: E.IV.28



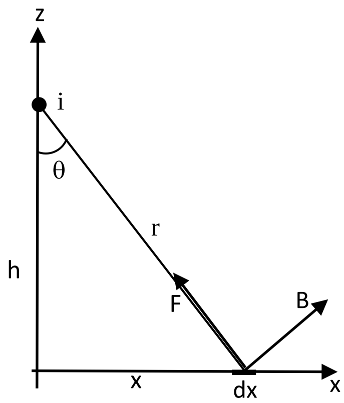
Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un filo conduttore infinito, percorso da una corrente ***i,*** è posto ***parallelamente*** ad una lastra conduttrice sottile, larga ***L,*** di spessore ***w*** e lunga ***l,*** percorsa da una densità di corrente costante ed uniforme ***J*** e disposta come in figura. La distanza minima fra il filo e la lastra è ***h***. Scrivere la forza che si esercita sulla lastra dovuta al filo, e calcolarne la componente in direzione z.



Dati: *i=10 A, L=10 cm, w=1 mm, l= 10 m, J=2 kA/cm^2, h=10 cm.*

Soluzione



Il campo B creato dalla corrente I, a distanza r dal filo è $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$ in direzione normale ad r e verso orario. La forza dF che si esercita sulla striscia, per una

lunghezza l, ed una larghezza dx, nel punto x è: $d\overline{F} = dI \cdot \bar{l} \times \overline{B}$ dove

$$dI = J \cdot W \cdot dx$$

è la corrente infinitesima che scorre attraverso una larghezza **dx** della striscia, alta w.
NOTA: la densità di corrente J scorre attraverso la superficie L·w, non attraverso l·L!

La forza infinitesima è quindi: $\mathrm{d}\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{J} \cdot \mathrm{W} \cdot \mathrm{dx} \cdot \mathrm{l} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\ (-\hat{\mathrm{r}})$

Scrivendo $\mathrm{x} = \mathrm{h}\ \tan\theta$, quindi $\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{h\ d\theta}}{\cos^2\theta}$ si ha: $\mathbf{d\overline{F}} = \frac{\mathbf{J \cdot W \cdot \mu_0 \cdot i \cdot l}}{\boldsymbol{2\pi}}\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{\cos\theta}}(\boldsymbol{-\hat{r}})$

La componente z sarà: $dF_z = |dF|\ \cos\theta = \frac{\mathrm{J \cdot W \cdot \mu_0 \cdot i \cdot l}}{2\pi}\, d\theta = A d\theta$ dove: $A = \frac{\mathrm{J \cdot W \cdot \mu_0 \cdot i \cdot l}}{2\pi}$

mentre la componente x sarà: $dF_x = -|dF| \sin\theta = -A\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta = A\frac{d\cos\theta}{\cos\theta}$

La forza sulla lastra sarà:

$$\mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{F_x^2 + F_z^2}}$$

[Non veniva richiesto il calcolo esplicito, che in ogni caso darebbe per la componente x:

$$\mathrm{F_x} = \int_0^{\pi/4} \mathrm{dF_x} = \mathrm{A}[\ln\cos\theta]_0^{\pi/4} = -\mathrm{A}\ln\sqrt{2} —$$

Mentre la forza totale in direzione z sarà $F_z = \int_{\theta=0}^{\theta=max} A d\theta = A\frac{\pi}{4}$ avendo considerato che $\theta_{MAX} = \theta(x = L) = arctg\frac{L}{h} = arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$

Quindi $\boldsymbol{F_z} = \frac{\mathbf{J \cdot W \cdot \mu_0 \cdot i \cdot l}}{\boldsymbol{2\pi}}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} = \frac{2\ 10^3\ 10^4\ 10^{-3}\ 4\,\pi\ 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot 4} = 10^{-1} \cdot \pi \cong 0{,}3\ N$