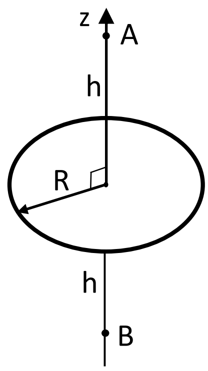
Esercizio n.1 [10 punti]

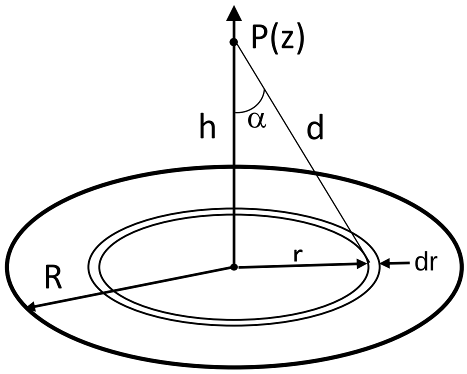


Si consideri un disco circolare sottile isolante, di raggio R, su cui è depositata una distribuzione di carica costante ed uniforme σ. Si calcoli il valore del potenziale elettrostatico nei due punti A e B posti sull'asse z del disco, rispettivamente in z(A)=h e z(B)=-h. Si calcoli inoltre il campo elettrostatico, in modulo, direzione e verso, nei due punti considerati.

Dati: σ = 16 nC/m^2 ; $\mathbf{h = R\sqrt{3}}$; R = 18 cm

Soluzione

Il potenziale **V(z)** si può calcolare integrando su tutto il cerchio il potenziale creato da una sottile corona circolare di raggio **r** e spessore **dr**, che si trova tutta ad una distanza **z** dal punto P:



$$dV(z,r) = \frac{k\,dq}{d} = \frac{k\sigma ds}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{k\sigma\cdot 2\pi r\cdot dr}{\sqrt{z^2+r^2}} \quad \text{dove} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$V(z) = \int dV = \int_0^R \frac{k\sigma\cdot 2\pi r\cdot dr}{\sqrt{z^2+r^2}} = k\sigma\pi\int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{d(z^2+r^2)}{\sqrt{z^2+r^2}} = k\sigma\pi\left[2\sqrt{z^2+r^2}\right]_z^{z^2+R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2}-|z|\right]$$

Attenzione: la radice quadrata di z^2 non è "z" ma |z|; se si scrivesse z si avrebbe per i valori positivi o negativi di z un valore diverso del potenziale, il che è impossibile.

Il potenziale V, calcolato in $z = \pm h = \pm R\sqrt{3}$, fornisce:

$$\therefore\ V(\pm h) = \frac{\sigma\cdot R(2-\sqrt{3})}{2\epsilon_0} \cong \frac{\sigma\cdot R\cdot 1/4}{2\epsilon_0} = \frac{16\cdot 10^{-9}\cdot 18\cdot 10^{-2}}{18\cdot 10^{-12}\cdot 4} \cong 40\ V$$

Risultato analogo si trova utilizzando come variabile l'angolo α, che andrà da α=0 a α=α(R) e ricordando che:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}\ .$$

Il campo elettrico si calcola dal gradiente del potenziale, considerando che l'unica componente diversa da zero, per simmetria, deve essere diretta lungo l'asse z:

$$E_z = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{|z|}{z} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

$$\therefore\ E(z=h) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right] = \left[1-\frac{R\sqrt{3}}{2R}\right] = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left(2-\sqrt{3}\right) \cong \frac{\sigma}{16\,\epsilon_0} = \frac{16\cdot 10^{-9}}{16\cdot 9\cdot 10^{-12}} \cong 100\ {}^{V}/_{m}$$

$$\therefore\ E(z=-h) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[-1+\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right] = -\left[1-\frac{R\sqrt{3}}{2R}\right] = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left(2-\sqrt{3}\right) \cong -\frac{\sigma}{16\,\epsilon_0} = -\frac{16\cdot 10^{-9}}{16\cdot 9\cdot 10^{-12}} \cong -100\ {}^{V}/_{m}$$

Se non ci si ricordasse la derivata del modulo si può procedere scrivendo il potenziale per i valori positivi di z, senza modulo, quindi calcolare il campo E(h), e considerare che il campo E(-h) deve avere lo stesso modulo, ma direzione opposta.

Il problema può essere risolto anche calcolando prima il campo Elettrico e poi il Potenziale, il procedimento è leggermente più complicato, analiticamente:

Si calcola la componente lungo z del campo E creato dalla corona circolare (r,dr), come sopra:

$$dE = \frac{k\,dq}{d^2}\cos\alpha = \frac{k\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{z^2 + r^2}\frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$E_z(z) = k \cdot \sigma \cdot \pi \int_{r=0}^{r=R} \frac{d(z^2 + r^2)}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right]$$

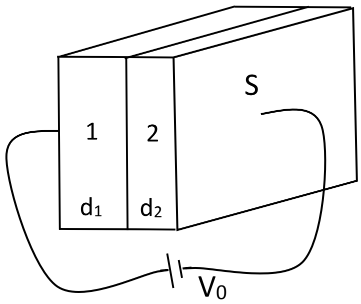
Da cui:

$E_z(h) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}\right]$ mentre: $E_z(-h) = -E_z(h)$ e:

$V(z > 0) = -\int^z E(z)dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right] = V(-z)$….notare che la derivata del modulo in z=0 non esiste essendo differente per z^+ e per z^-.

Esercizio n.2 [10 punti]

Si consideri un sistema composto da un condensatore piano collegato ad un generatore di f.e.m ideale V_0. Il condensatore, con le superfici piane di area S e spessore totale d= $d_1 + d_2$, è composto da due diversi materiali, (vedi figura). Si calcoli, supponendo di non considerare gli effetti ai bordi, il valore della capacità del condensatore, la differenza di potenziale presente ai capi dei due condensatori che costituiscono il sistema, e il valore del vettore D all'interno dei due condensatori.



Dati: d_1 = 3 mm ; d_2 = 1 mm ; ε_{r1} = 1 ; ε_{r2} = 5 ; S = 3 m^2 ; V_0 = 200 V

Soluzione

Le due capacità sono in serie, quindi:

$$\therefore\ C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \varepsilon_0\ \frac{15}{16} \cdot 10^3\ F\ \cong 8{,}4\ nF,\ \text{dove: } C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{S}{d_1} = \varepsilon_0\ \cdot 10^3\ F\ ;\ C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{S}{d_2} = \varepsilon_0\ 15 \cdot 10^3\ F$$

La carica elettrica presente sulle armature, sia di C1 che di C2, è: $Q = V_0 C \cong 200\ \cdot 8{,}4\ \cdot 10^{-9} \cong 1{,}7\ \mu C$

Da cui posso calcolare:

$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1} = V_0 \frac{C_2}{(C_1+C_2)}$ mentre: $V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_2} = V_0 \frac{C_1}{(C_1+C_2)} = V_0 - V_1$ che, inserendo i valori numerici, diventano:

$$\therefore\ V_1 = 200 \frac{\varepsilon_2/d_2}{(1/d_1 + \varepsilon_2/d_2)} = 200\ \frac{15}{16} = 187{,}5\ V \quad ;\ \therefore\ V_2 = 200 - 187{,}5 = 12{,}5\ V$$

Nota: la somma di V_1 e di V_2 DEVE essere uguale a V_0.

Il vettore D, che dipende solo dalle cariche libere depositate sulle superfici esterne, è identico nei due materiali:

$$\therefore\ |\overline{D}| = \sigma = \frac{Q}{S} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{3} \cong 0{,}56\ \ \mu C/m^2$$

Esercizio n.3 [10 punti]

In un piano orizzontale (x,y) sono poste due guide rigide conduttrici parallele e infinite collegate ad un estremo da un elemento conduttore di lunghezza ***L.***. Sopra queste guide è poggiata una sbarretta conduttrice rigida, di massa ***m***, libera di muoversi senza attrito in direzione ***x***. Tutto il sistema è immerso in un campo magnetico costante e uniforme $\overline{B} = B\,\hat{z}$. La sbarretta mobile ha una resistenza elettrica R, mentre le guide e l'elemento L hanno resistenza praticamente nulla. All'istante t=0 la sbarretta si trova nella posizione x=0, e possiede una velocità $V = V_0 \cdot \hat{x}$.

a) Scrivere l'espressione della corrente elettrica che scorre nel circuito per un tempo generico t.

b) Scrivere l'espressione, sempre ad un istante t, della forza F che agisce sulla sbarretta e della velocità della sbarretta.

c) Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule dopo un tempo t che tende ad infinito.

Dati: L= 10 cm ; m=20 g ; v_0= 9 m/s ; B= 1 T ; R= 10 Ω

Soluzione

La sbarretta mobile è immersa in un campo magnetico B; essendo la sbarretta in moto, il flusso di B attraverso la superficie individuata dalla sbarretta e dalle guide varierà nel tempo, generando quindi una f.e.m. indotta f, e una corrente i, che dipenderanno dalla posizione x della sbarretta:

$$f_{em}(x) = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{dx \cdot L \cdot B}{dt} = -\frac{dx}{dt}BL = -v(t)BL$$

$$\therefore \quad i(x) = \frac{f_{em}(x)}{R} = \frac{BL}{R}v(t) \quad \text{in verso ORARIO.}$$

La sbarretta mobile sarà quindi sottoposta ad una forza **F** dovuta all'interazione fra la corrente **i** che la attraversa e il campo **B**:

$$\therefore \qquad \overline{F} = i\,\overline{L} \times \overline{B} = -i \cdot B \cdot L\,\hat{x} = -\frac{B^2 L^2}{R} v(t)\,\hat{x}$$

L'equazione del moto sarà:

$$F_x = m\,a_x \quad \text{quindi} \quad -\frac{B^2 L^2}{R} v(t) = m\frac{dv}{dt} \quad \text{e} \quad -\frac{B^2 L^2}{mR} v(t) = \frac{dv}{dt}$$

che, ponendo $\tau = \frac{mR}{B^2 L^2}$, diventa $\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$ da cui, integrando fra t=0 e t=t:

$$\ln\left(v(t)/v_0\right) = -t/\tau \quad \text{e} \quad \therefore \; v(t) = v_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

L'energia dissipata per effetto Joule dopo un tempo molto lungo, quando cioè la sbarretta si sarà fermata, sarà uguale all'energia cinetica iniziale della sbarretta:

$$\therefore E_J(t=\infty) = E_c(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 10^{-2} \cdot 81 = 0{,}81 \;\text{ J}$$

L'energia dissipata si poteva calcolare anche, in modo molto meno elegante, integrando la potenza dissipata in dt fra zero e infinito, il risultato ovviamente deve essere lo stesso.:

$$E_J = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \frac{B^2 L^2}{R^2} v^2(t) R dt = \frac{B^2 L^2}{R} v_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{\tau}{2}\frac{B^2 L^2}{R} v_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Dati ulteriori e approssimazioni (dove applicabili):

$\varepsilon_0 \cong 9 \cdot 10^{-12}$ [S.I.] ; $\sqrt{2} = 1{,}41$; $\sqrt{3} = 1{,}73$; $\sqrt{5} = 2{,}24$; $\sqrt{7} = 2{,}65$

Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%.