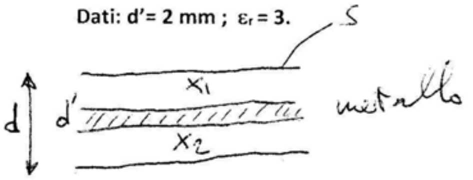
Prova scritta di Fisica 2 10.2.2016

Esercizio n.1 **[10 punti]**

Tra le due armature di un condensatore piano, considerato ideale, in aria, viene introdotta una lastra metallica piana di spessore *d'* inferiore alla distanza fra le due armature. Se invece della lastra metallica inserisco nella capacità una lastra di materiale dielettrico con costante dielettrica relativa ε_r e di spessore *d''*, si chiede di calcolare lo spessore *d''* affinché la capacità con la lastra dielettrica inserita sia uguale a quella con la lastra metallica inserita.

Dati: d'= 2 mm ; ε_r = 3.

$$\left[C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\right] \text{ Non serve}$$



$$C_m^{-1} = C'^{-1} = \frac{1}{C(x_1)} + \frac{1}{C(x_2)} = \frac{x_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{x_2}{\varepsilon_0 S} =$$

$$= \frac{x_1 + d - (x_1 + d')}{\varepsilon_0 S} = \frac{\cancel{x_1} + d - \cancel{x_1} - d'}{\varepsilon_0 S} = \frac{d - d'}{\varepsilon_0 S} \quad \therefore \quad C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d'}$$

(x_1 e x_2 sono $\neq$ dal caso precedente)

$$C''^{-1} = \frac{1}{C(x_1)} + \frac{1}{C(x_2)} + \frac{1}{C(d'')} = \frac{x_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{x_2}{\varepsilon_0 S} + \frac{d''}{\varepsilon_0 S \varepsilon_r}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \frac{d - x_1 - x_2}{\varepsilon_r}}{\varepsilon_0 S} = \frac{x_1 - \frac{x_1}{\varepsilon_r} + x_2 - \frac{x_2}{\varepsilon_r} + \frac{d}{\varepsilon_r}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\underbrace{(x_1 + x_2)}_{d - d''}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) + \frac{d}{\varepsilon_r}}{\varepsilon_0 S}$$

$$\therefore \quad [C'']^{-1} = \frac{(d - d'')\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) + \frac{d}{\varepsilon_r}}{\varepsilon_0 S}$$

$$[C'']^{-1} = \frac{d - \cancel{\frac{d}{\varepsilon_r}} - d''\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) + \cancel{\frac{d}{\varepsilon_r}}}{\varepsilon_0 S} = \frac{d - d''\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}{\varepsilon_0 S} = \frac{d - d'' + \frac{d''}{\varepsilon_r}}{\varepsilon_0 S} = \bullet$$

$$[C']^{-1} = [C'']^{-1} \qquad \cancel{d} - d' = \cancel{d} - d''\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \qquad d'' = \frac{d'}{1 - \frac{1}{\varepsilon_r}} = d' \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}$$

$$= \cancel{2}\, \frac{3}{\cancel{2}} \text{ mm} = 3 \text{ mm}$$

$$\bullet \quad \frac{\varepsilon_r d - d''(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{\varepsilon_r (d - d'') + d''}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

Prova scritta di Fisica 2 10.2.2016

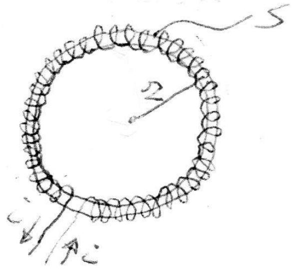
Esercizio n.2 **[10 punti]**

Si consideri un circuito magnetico toroidale di raggio medio <r>=r = 20 cm, di sezione S = 10 cm^2, e di permeabilità magnetica relativa μ_r. Il solenoide è completamente avvolto da uno strato di spire realizzate con un filo il cui diametro è di 1 mm, percorse da una corrente I; le spire sono accostate una all'altra. In queste condizioni dentro il materiale magnetico si ha un campo B = 4 T se la forza magnetomotrice è $f_m = 10^4$ Asp.

Determinare la permeabilità magnetica del materiale e la corrente che scorre nelle spire.

1) La legge di Hopkinson è

$$f_m = R\,\phi(B) \qquad R = \frac{f_m}{\phi(B)} = \frac{f_m}{B\cdot S}$$



dove $R = \frac{1}{\mu_r\mu_0}\frac{l}{S} = \frac{2\pi r}{\mu_r\mu_0 S}$ [1,5]

quindi $\frac{2\pi r}{\mu_r\mu_0\cancel{S}} = \frac{f_m}{B\cdot\cancel{S}}$

[2] $\mu_r = \frac{2\pi r\cdot B}{\mu_0 f_m} = \frac{2\cancel{\pi}\cdot 20\times10^{-2}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4\pi}\,10^{-7}\,10^{4}} = 4\,\frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 400$

2) $f_m = N i$ $\qquad N = n(\text{numero di spire/m})\cdot l = \frac{1}{\phi_f}\,2\pi r\ (=1256)$

[4] quindi $i = \frac{f_m}{N} = \frac{f_m\,\phi_f}{2\pi r} = \frac{10^{4}\,10^{-3}}{2\pi\,20\,10^{-2}} = \frac{10^{2}}{4\pi}$

$= \frac{25}{\pi} \sim 8$ A

=

$B = \frac{N i\,\mu_0\mu_r}{2\pi r} = \frac{i\,\mu_0\mu_r}{\phi} = \mu_r\mu_0\,n\,i \rightarrow i = \frac{B}{\mu_0\mu_r n} = B\phi_f/\mu_0$

Anche $i = \frac{\phi(B)\cdot R}{N} = \frac{B\cdot\cancel{S}}{N}\,\frac{l}{\mu_r\mu_0\cancel{S}} = \frac{B\,\phi_f}{\mu_r\mu_0}$

Nota: Raggio superficie S : $R_S = \left[\frac{S}{\pi}\right]^{1/2} = \left[\frac{10\times10^{-4}}{\cancel{\pi}}\right]^{1/2} \sim \sqrt{\pi}\,10^{-2}$

$\sim 1{,}8$ cm

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Prova scritta di Fisica 2 10.2.2016

Ad un condensatore in aria con le facce piane e parallele, di forma circolare con raggio R e distanza d è applicata una differenza di potenziale $V(t) = V_0 \sin \omega t$. Calcolare il valore massimo del vettore induzione magnetica B all'interno del condensatore ad una distanza r dal suo asse di simmetria.

Dati: R = 20 cm ; d = 1 mm ; V₀ = 900 V ; ω = 500 rad/s ; r = 10 cm.

Facendo la circuitazione di $\overline{B}$ lungo la circonferenza di raggio r

$$\oint_{\ell} \overline{B} \cdot d\ell = \mu_0 i_{int} = \mu_0 \int_{s(\ell)} \overline{J} \cdot d\overline{s}$$ Nel vuoto $\overline{J}$ è la sola densità della corrente di spostamento

$$B \cdot 2\cancel{\pi} \cancel{r} \quad \mu_0 J_s \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \qquad B = \frac{\mu_0 r}{2} J_s = \frac{\mu_0 r}{2} \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$D = \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_0 V}{d} \quad \text{quindi} \quad B = \frac{\mu_0 r}{2} \frac{\varepsilon_0}{d} \frac{\partial V(t)}{\partial t} \quad ; \; V(t) = V_0 \operatorname{sen} \omega t$$

$$B = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 r}{2d} V_0 \omega \cos \omega t \quad \text{quindi} \quad B_{MAX} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 r V_0 \omega}{2d} = \frac{r V_0 \omega}{2c^2 d}$$

$$= \frac{10^{-1} \, 9\times10^2 \, 5\times10^2}{2 \, 9\times10^{16} \, 10^{-3}} = 2{,}5 \; 10^{-10} \, T = 0{,}25 \, nT$$

Altro approccio di calcolo:

$$\oint_{\ell} \overline{B} \cdot d\overline{\ell} = \mu_0 i_{int} = \mu_0 \frac{d q_{int}}{dt} \overset{[2]}{=} \mu_0 \frac{d}{dt} \varepsilon_0 \Phi(E)_{s(\ell)} =$$

$$= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{s(\ell)} \overline{E} \cdot d\overline{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E \cdot \pi r^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} \qquad E = \frac{V}{d}$$

$$B \cdot 2\cancel{\pi} \cancel{r} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2}{d} \frac{d V(t)}{dt} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{d} V_0 \omega \cos \omega t$$

$$B = \frac{r V_0 \omega}{2 d c^2} \cos \omega t \quad \rightsquigarrow \quad B_{MAX} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 r V_0 \omega}{2d}$$

$$= 0{,}25 \, nT$$

Calcolo con $\frac{R^2}{2}$ invece di r: $= 0{,}25\, nT \times 4 = 1 nT$