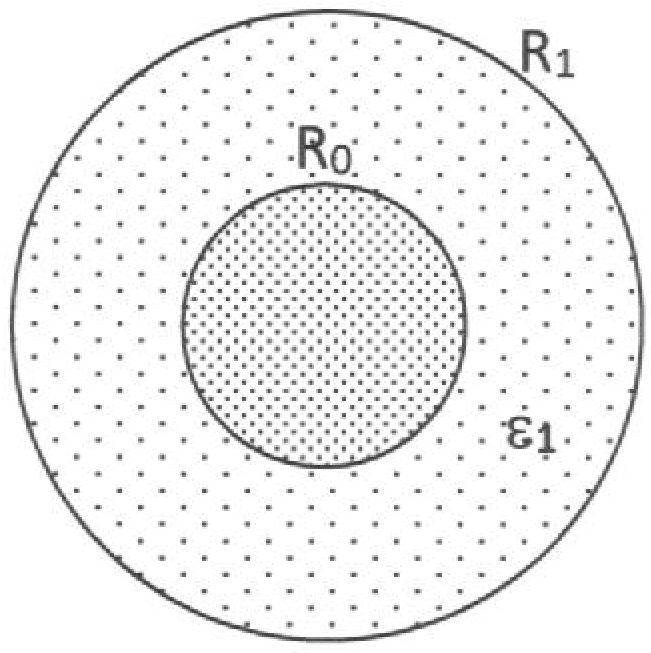
Esercizio n.1 **[10 punti]**



Nello spazio sono presenti due sfere concentriche di raggi R_0 e R_1 [vedi figura]. La sfera interna di raggio R_0 è conduttrice e su di essa è stata posta la carica elettrica Q, mente la corona sferica di raggio minore R_0 e raggio maggiore R_1 è un isolante di costante dielettrica relativa ε_1 . Determinare A) L'espressione del campo elettrico presente in tutto lo spazio. B) L'energia elettrostatica del sistema composto dalle due sfere.

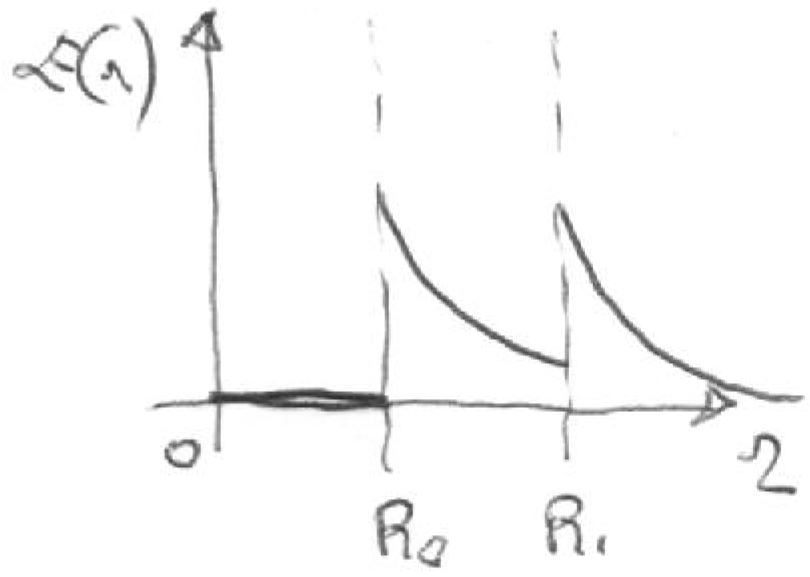
Dati: R_0 = 4,5 cm ; R_1 = 2 R_0 ; Q =2 nC ; ε_1=2

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_1$$

A) $R \leq R_0 \quad E(r) = 0$

$$R_0 \leq r \leq R_1 \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}$$

$$r \geq R_1 \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$



B) Nel volume $R_0 \leq r < R_1$

$$\mathcal{E}_{01} = \int d\mathcal{E} = \int \frac{1}{2}\varepsilon E^2 d\tau = \int \frac{1}{2}\frac{\cancel{\varepsilon}}{(\pi 4\varepsilon)^{\cancel{2}}}\frac{Q^2}{r^{\cancel{4}\,2}}\cancel{\pi 4 r^2}\, dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\int_{R_0}^{R_1}\frac{dr}{r^3}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_0}^{R_1} = \dots\left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right] = \dots\left[\frac{1}{2R_0}\right] = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon}/R_0$$

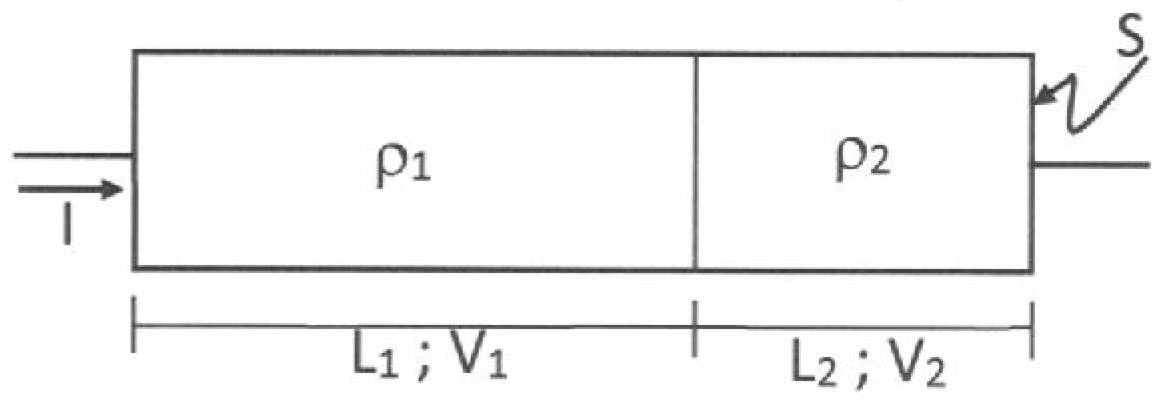
Nel volume $r > R_1$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{\infty} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_0} \qquad \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_1 = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R_0}\left[\underbrace{\frac{1}{\varepsilon_1} + 1}_{3/2}\right]$$

Vedi anche M.S. E.III.9

$$= 3 \times 10^{-7}\ \text{J}$$

Esercizio n.2 **[10 punti]**



Due conduttori metallici di resistività ρ_1 e ρ_2, lunghezza L_1 e L_2 ed uguale sezione S sono disposti come in figura. Sa ai capi dei due conduttori è presente una differenza di potenziale rispettivamente V_1 e V_2, si chiede di calcolare: A) La corrente che scorre nei conduttori. B) La densità della carica elettrica presente sulla superficie di separazione fra i due conduttori.

Dati: V1= 2 V ; V2 = 3 V ; ρ_1= 2 . 10$^{-7}\Omega$ m ; ρ_2 = 1 10^{-7} Ω m L1 = 2 cm ; L2 = ~~1~~ 6 cm ; S = 100 μm^2

A) $I = \frac{V_{TOT}}{R_{TOT}}$ $\quad V_{TOT} = V_1 + V_2 = 5\,V$

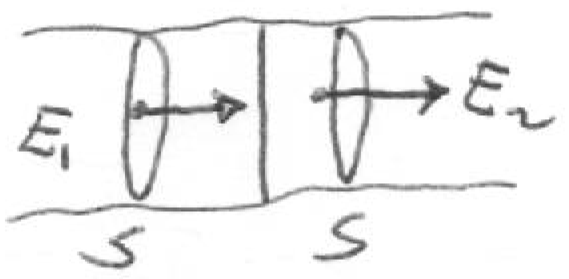
$$R_{TOT} = R_1 + R_2 = \rho_1 \frac{L_1}{S} + \rho_2 \frac{L_2}{S} = 100\,\Omega$$

$$I = \frac{5V}{100\,\Omega} = 0{,}05\,A \qquad (R_1 = 40\,\Omega\ ;\ R_2 = 60\,\Omega)$$

B) A sinistra e a destra della separazione:

$$E_{1,2} = \rho_{1,2} J \qquad J = \frac{I}{S} \qquad \text{anche } E_{1,2} = \frac{V_{1,2}}{L_{1,2}}$$

$$\phi(E)_V = S(E_2 - E_1)$$



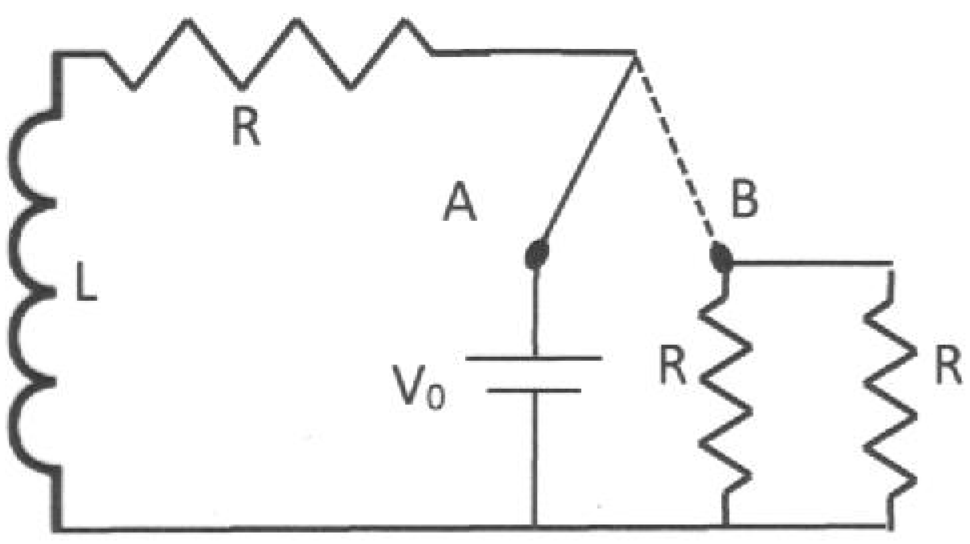
$$= S J (\rho_2 - \rho_1)$$

$$\frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = \frac{Q_s}{\varepsilon_0} = I(\rho_2 - \rho_1) \rightsquigarrow \sigma = \varepsilon_0 \frac{I}{S}(\rho_2 - \rho_1) =$$

$$= -4{,}5 \times 10^{-10}\ C/m^2$$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un generatore di f.e.m. V_0 è collegato ad una resistenza R e ad una induttanza L [vedi figura, deviatore inizialmente nella posizione A]. Quando il sistema si trova in uno stato stazionario il deviatore viene portato al tempo t=0 dalla posizione A alla posizione B, in un tempo brevissimo. Calcolare: A) L'espressione della corrente che fluisce nel nuovo circuito in funzione del tempo. B) L'energia totale dissipata in questo circuito dall'istante iniziale fino a quando il sistema torna in uno stato stazionario. C) Il rapporto fra questa energia e l'energia potenziale inizialmente immagazzinata negli elementi passivi del circuito.



Dati: V_0= 2 V; R = 20 Ω ; L = 30 mH.

A) $-L\frac{di}{dt} = R_T i \qquad R_T = R + R/\!/R = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$

$$\int_{I(0)}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\frac{R_T}{L}\int_0^t dt \qquad \tau = \frac{L}{R_T} = \frac{2}{3}\frac{L}{R} = 1\,ms$$

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau} \qquad i_0 = \frac{V_0}{R} = 0,1\,A$$

B1) $\mathcal{E}(0,t) = \int_0^t i^2 R_T\, dt = \frac{3}{2}R\frac{V_0^2}{R^2}\left(-\frac{\tau}{2}\right)\left[e^{-2t/\tau}\right]_0^t$

$$t = \tau_0 \Rightarrow \mathcal{E}(\tau/2) \simeq \frac{V_0^2 L}{3R^2} \simeq 1\cdot 10^{-4}\,J$$

B2) $t = \infty \quad \mathcal{E}(\infty) = \frac{1}{2}L\frac{V_0^2}{R_0^2} = \frac{1}{2}L i_0^2 = 1,5\times 10^{-4}\,J$

C) $\mathcal{E}(L)_{t=0} = \frac{1}{2}L i_0^2 = \mathcal{E}(\infty) \Rightarrow \frac{\mathcal{E}(\infty)}{\mathcal{E}(L)} = 1$

Vedi anche M.S. E.VII.8