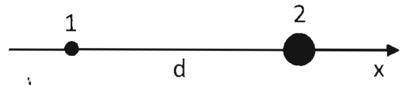
Prova scritta di Fisica 2 $\quad \vec{E} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1-Q_2}{d^2} = -\frac{3Q}{5\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{x}$ 13.6.2016

Esercizio n.1 **[10 punti]**

Consideriamo due sfere metalliche 1 e 2 di raggi R1 e R2. Sulla sfera 2 è inizialmente depositata una carica elettrica Q. In seguito la sfera 1 viene caricata ponendola in contatto con la sfera 2. 1) Calcolare la carica elettrica presente sulle due sfere dopo questa operazione. 2) Se le due sfere vengono poi poste ad una distanza d fra i due centri, si calcoli il campo elettrico, in modulo direzione e verso, nel punto di mezzo del segmento che congiunge i due centri, 3) Si calcoli inoltre il punto su questo segmento dove questo campo elettrico è nullo. Il disegno non è in scala.

Dati: R1 = 0,5 cm ; R2 = 2 cm ; Q = 0,5 μC ; d = 1 m

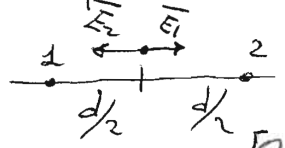


1) Le sfere vanno allo stesso potenziale

[1,5] $V_1 = V_2$; $\frac{KQ_1}{R_1} = \frac{KQ_2}{R_2} \rightarrow Q_1 = Q_2\frac{R_1}{R_2} = \frac{Q_2}{4}$

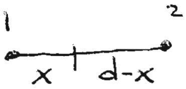
[3,5] $Q = Q_1 + Q_2 \rightarrow Q_1 = Q - Q_2 = \frac{Q_2}{4} \qquad Q = \frac{5}{4}Q_2$

$Q_2 = \frac{4}{5}Q$ [1,5] e $Q_1 = \frac{1}{5}Q \qquad Q_2 = 0,4\,\mu C$ [0,5] $Q_1 = 0,1\,\mu C$ ∴



2) [1,0] $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left[\frac{KQ_1}{(d/2)^2} - \frac{KQ_2}{(d/2)^2}\right]\hat{x}$

[3] $= \frac{K(Q_1-Q_2)}{(d/2)^2}\hat{x} = \frac{K}{(d/2)^2}\left(-\frac{3}{5}Q\right)\hat{x} = -\frac{9\cdot10^9\,3\cdot\cancel{5}\times10^{-7}}{\cancel{5}(1/2)^2} = -1,08\cdot10^4\,V/m\,\hat{x}$ ∴ [1,5] [0,5]

3) 

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \qquad \frac{\cancel{K}Q_1}{x^2} - \frac{\cancel{K}Q_2}{(d-x)^2} = 0$ [1,0]

$\frac{1}{\cancel{5}}\frac{\cancel{Q}}{x^2} - \frac{4}{\cancel{5}}\frac{\cancel{Q}}{(d-x)^2} = 0 \qquad \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(d-x)^2}$

[3,5] $(d-x)^2 = 4x^2 \qquad d^2 - 2xd + x^2 - 4x^2 = 0$ [1,5]

$-3x^2 - 2xd + d^2 = 0 \qquad x^2 + \frac{2}{3}xd - \frac{d^2}{3} = 0$

$\tilde{x} = \frac{-\frac{2}{3}d \pm \sqrt{\frac{4}{9}d^2 + \frac{4}{3}d^2}}{2} = \frac{\left(-\frac{\cancel{2}}{3} \oplus \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{3}\right)d}{\cancel{2}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)d =$

$\simeq d\frac{1,73-1}{3} \simeq d\frac{0,73}{3} = \frac{\cancel{3}}{4}\frac{1}{\cancel{3}}d \sim \frac{d}{4} \cong 25\,cm$ ∴ [1] esatto $= 24,4\,cm$ [0,5]

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Un generatore di f.e.m. V_0 e resistenza interna trascurabile viene utilizzato per caricare un condensatore di capacità C attraverso una resistenza R. Sapendo che l'energia dissipata in R nei primi 5 ms è uguale a 0,1 mJ, si calcoli il valore di V_0.

Dati: R = 100 MΩ ; C = 100 pF

[2,5]

La corrente è $i(t) = i(0)\, e^{-t/\tau}$ dove $i_0 = \frac{V_0}{R}$, $\tau = RC$

$$\left[V_0 = R\, i(t) + \frac{Q(t)}{C} = R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \right.$$ derivando:

$$0 = R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \qquad \int_{I(0)}^{I(t)} \frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau} \rightarrow i(t) = i(0)\, e^{-t/\tau} \left. \right]$$

$$\mathcal{E}^*(t^*)\Big|_0^{t^*} = \int_0^t R\, i^2(t)\, dt = \frac{R\tau}{2}\int_0^{2t/\tau} \frac{V_0^2}{R^2}\, e^{-2t/\tau}\, d\overbrace{\frac{2t}{\tau}}^{z} =$$

[2]

$$= \frac{V_0^2 RC}{2R}\left[-e^{-z}\right]_0^{2t/\tau = z} = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - e^{-2t^*/\tau}\right) = \mathcal{E}^*$$

[1,0]

$$V_0^2 = \frac{2\mathcal{E}^*}{C}\frac{1}{(1-e^{-2t^*/\tau})} \qquad V_0 = \left[\frac{2\mathcal{E}^*}{C}\frac{1}{1-e^{-2t^*/\tau}}\right]^{1/2}$$ [1,5]

[1] $$\left(\begin{array}{l} \tau = RC = 100 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-12} = 10^{-2}\, s = 10\ ms \\ t^* = 5\ ms = \tau/2 \qquad e^{-2t^*/\tau} = e^{-1} \end{array} \right.$$

$\frac{55}{17} \sim \frac{\cancel{7{,}8}}{\cancel{2{,}8}}$

$$V_0 = \left[\frac{2\cdot 10^{-4}}{10^{-10}}\frac{1}{1-e^{-1}}\right]^{1/2} = 10^3\left[\frac{2\times 2{,}72}{1{,}72}\right]^{1/2} \sim 10^3\sqrt{3{,}5}\ V \sim 1800\ V$$

[1]

$$1/\left(1-\frac{1}{e}\right) = \frac{e}{e-1} = \frac{2{,}72}{1{,}72}$$

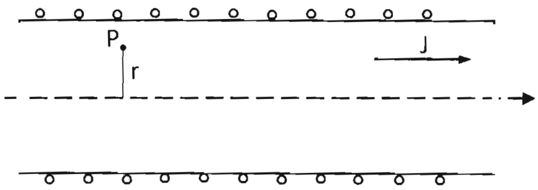
esatto $= 10^3 \cdot 1{,}78\ V$

$= 1780\ V$ [1]

Prova scritta di Fisica 2 13.6.2016

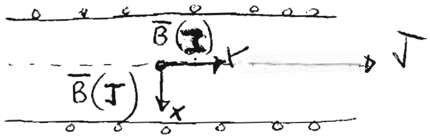
Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un tubo cilindrico vuoto, di raggio R e lunghezza L>>R, è attraversato da un flusso costante di elettroni tale da produrre una densità di corrente uniforme J diretta lungo l'asse del tubo. Intorno al tubo sono avvolte delle spire con densità n, percorse da una corrente costante I_s . Calcolare il valore della densità di energia associato al campo magnetico in un punto P posto a distanza r dall'asse del tubo, essendo r<R.



Dati: J= 10 A/cm² ; n = 10² s/m ; I_s = 10 A ; r = 4 cm

Visto dall'alto si ha



il verso di I_s e quindi di $B(I_s)$ non ha importanza dovendo fare il modulo

Campo creato da J: $B(J)_r$ $\quad \oint_r \overline{B}_J \cdot d\overline{l} = \mu_0 \Sigma I$ $[\cancel{1{,}5}]$ $[2]$

$$B_J(r) \cdot 2\cancel{\pi}\cancel{r} = \mu_0 J \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \longrightarrow \overline{B}_J(r) = \frac{\mu_0}{2} J \cdot r\, \hat{x} \quad [\cancel{1{,}5}]$$

Campo creato da I_s (quello del solenoide ∞)

$$\overline{B}(I_s) = \mu_0 n I_s \; [1] \; \hat{y} \qquad \overline{B}_{TOT} = \overline{B}_J + \overline{B}_{I_s}$$

I due campi sono $\perp \Rightarrow B_{TOT}^2 = B_J^2 + B^2(I_s)$ $[3]$

La densità di energia è

$$[1] \quad w_B(r) = \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 = \frac{1}{2}\frac{B_{TOT}^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\left(B_J^2 + B_{I_s}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0^2}{4} J^2 r^2 + \mu_0^2 n^2 I_s^2\right) =$$

$J = 10 \frac{A}{cm^2} = 10^5 \frac{A}{m^2}$

$$= \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{J^2 r^2}{4} + n^2 I_s^2\right) [2] = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi \cdot 10^{-7}}{\cancel{2}}\left(\underbrace{\frac{10^{10} \cdot \cancel{16} \cdot 10^{-4}}{\cancel{4}} + 10^4 \cdot 10^2}_{5\times10^6}\right) = \pi \frac{J}{m^3} \; [1]$$