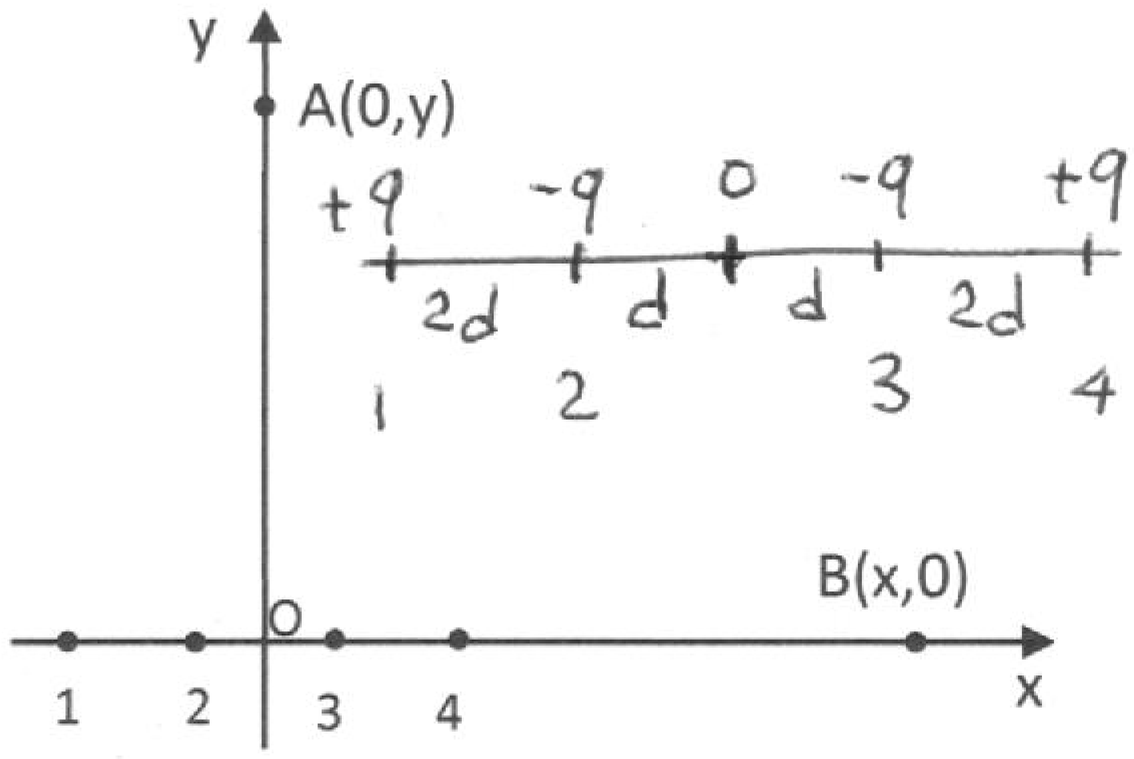
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Si consideri un sistema di riferimento s(O,x,y) in cui sono fissate quattro cariche elettriche q1, q2, q3 e q4 di carica q1=q4= q; q2=q3= - q, poste sull'asse x nei punti di coordinate q1(-3d,0); q2(-d,0) ; q3(d,0) ; q4(3d,0).
Si scriva l'espressione del potenziale elettrostatico del sistema di cariche nei punti A(0,y) e B(x,0) nelle seguenti approssimazioni:

1) Considerando il potenziale totale come somma dei potenziali creati dai due dipoli (q1, q2) e (q3, q4).
2) Calcolando il potenziale del momento di quadrupolo del sistema, dove il potenziale del quadrupolo, calcolato nel punto $\bar{r}$, è definito come:

$$V(\bar{r}) = k\sum_i q_i \frac{3(\hat{r}\cdot\bar{r}_i)^2 - |\bar{r}_i|^2}{2|\bar{r}|^3}$$



In cui q_i sono le cariche che compongono il sistema, e $\bar{r}_i$ la loro posizione nel sistema di riferimento dato.

Si calcoli il valore numerico del potenziale nei punti A e B per il solo caso 2.

Dati: q = 64 nC ; d = 1 cm ; x = y = 8d

Punto A(0, r)

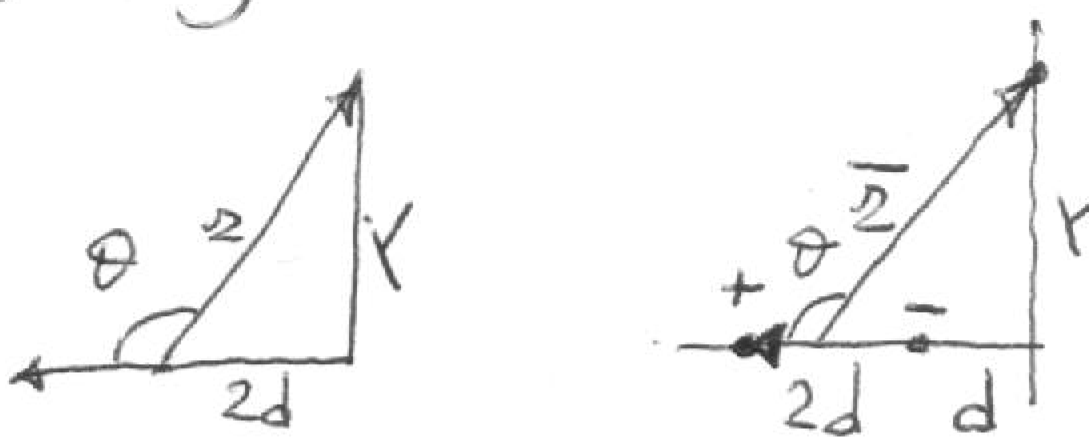
Quadrupolo $\quad V_A(0,r) = k\sum q_i \frac{3(\hat{r}\cdot\bar{r}_i)^2 - |\bar{r}_i|^2}{2r^3} \quad [\hat{r}\cdot\bar{r}_i = 0]$

$q_{1,4}: V_1 = kq\frac{0-9d^2}{2r^3} = -kq\frac{9}{2}\frac{d^2}{r^3} = V_4$

$q_{2,3}: V_2 = k(-q)\frac{0-d^2}{2r^3} = kq\frac{d^2}{2r^3} = V_2$

$\frac{V^{A,Q}_{tot}}{k} = \sum\frac{V_i}{k} = -8\frac{qd^2}{r^3}$ ∴

Dipolo



$\frac{V^A_{(1,2)}(r)}{k} = \frac{\bar{p}\cdot\hat{\varrho}}{\varrho^2} = \frac{2dq\cos\theta}{\varrho^2}$

$\bar{p}_{1,2} = -2qd\hat{x}$ $\quad = 2qd\frac{-2d/\varrho}{\varrho^2} = -4\frac{qd^2}{\varrho^3} = V_{(3,4)}$

$\frac{V^{A,D}_{tot}}{k} = -8\frac{qd^2}{\varrho^3} = -8\frac{qd^2}{[r^2+4d^2]^{3/2}} = -8\frac{qd^2}{r^3}\frac{1}{[1+\frac{4d^2}{r^2}]^{3/2}}$ ∴

Punto B(x, 0) $\quad (|\hat{x}\cdot\bar{r}_i| = r_i) \quad \frac{V_i^Q}{k} = q_i\frac{\cancel{2}r_i^2}{\cancel{2}|r|^3}$

$q_{1,4}: \frac{V_1^Q}{k} = q\frac{(3d)^2}{x^3} = \frac{V_4}{k} \qquad q_{2,3}: \frac{V^Q_{2,3}}{k} = -q\frac{d^2}{x^3}$

$\frac{V^{B,Q}_{tot}}{k} = 16\frac{qd^2}{x^3} = \frac{16}{8^3}\frac{q}{d}$ ∴ $= \frac{1}{32}\frac{q}{d}$

① ②

Dipolo (B) $\quad \overline{p_i}\cdot\hat{r} = \pm p_i$

$$\frac{V_D}{k}(1,2) = -\frac{2qd}{r^2} = -\frac{2qd}{(x+2d)^2}$$

$$\frac{V_D}{k}(3,4) = +\frac{2qd}{r^2} = +\frac{2qd}{(x-2d)^2}$$

$$* = \frac{q}{d}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{16}\right)^2}$$

$$\frac{V^{D,B}_{TOT}}{k} = 2qd\left[\frac{-1}{(x+2d)^2} + \frac{1}{(x-2d)^2}\right] =$$

$$= 2qd\,\frac{-(x-2d)^2+(x+2d)^2}{[(x+2d)(x-2d)]^2} = \frac{2qd\cdot 8xd}{(x^2-4d^2)^2} =$$

$$= \frac{16qxd^2}{(x^2-4d^2)^2} = \frac{16qd^2}{x^3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{4d^2}{x^2}\right)^2} = \frac{2q}{64d}\,\frac{1}{\left(1-\frac{4d^2}{64d^2}\right)^2} = *$$

Calcoli:

Quadrupolo (A) $\quad V_Q(A) = -k\,\frac{qd^2}{r^3} = -k\,\frac{q}{8^3 d}$

$$= -9\times\cancel{10^9}\,\frac{64\cdot\cancel{10^{-9}}}{8\times\cancel{64}\times10^{-2}} = -\frac{9}{8}\,10^2\ V$$

$\simeq 110$ Volt

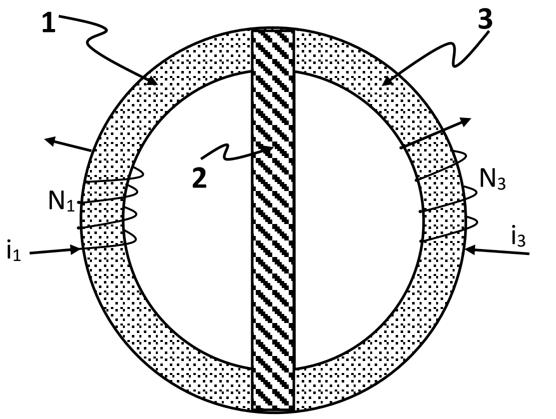
Quadrupolo (B) $\quad V_Q(B) = k16\,\frac{qd^2}{x^3} = 16k\,\frac{q}{8^3 d}$

$$= \cancel{16}^{\,2}\times 9\cdot\cancel{10^9}\,\frac{\cancel{64}\cdot\cancel{10^{-9}}}{\cancel{8}\times\cancel{64}\cdot10^{-2}} = 18\cdot10^2\ V$$

$= 1800\ V$

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Si consideri il circuito magnetico mostrato in figura, composto da tre tratti di materiale ferromagnetico **1, 2, 3**, di permeabilità magnetica relativa, sezione e lunghezza rispettivamente: ***[μ_1 , S_1 , L_1]; [$\mu_2 = \mu_1/2$, $S_2 = 2S_1$, $L_2 = L_1/2$]; [$\mu_3 = \mu_1$, $S_3 = S_1$, $L_3 = L_1$]***. Intorno al tratto 1 sono presenti ***N_1*** spire percorse da una corrente ***i_1*** , ed intorno al tratto 3, ***N_3*** spire percorse da una corrente ***i_3***. 1) Si supponga che inizialmente la corrente i_3 sia nulla. Calcolare in queste condizioni il valore del campo B che attraversa il tratto 2. 2) Si supponga ora che la corrente i_3 sia diversa da zero. Si calcoli il valore del prodotto N_3 i_3 affinché il flusso di B attraverso il tratto 2 sia nullo. Si determini anche il verso della corrente i_3 , assumendo come positivo quello disegnato in figura e come negativo quello contrario. Si assumano le permeabilità magnetiche ***μ_i*** costanti con il campo applicato.



Dati: $N_1 = 10^2$; $i_1 = 1$ mA ; $\mu_1 = 10^3$; $L_1 = 2$ cm

L'equazione generale che descrive il sistema è $\sum f = \sum \mathcal{R}\phi \quad dove\ f = Ni$; $\mathcal{R} = L/\mu S \ \ e\ \ \phi = B \cdot S$; il comportamento è analogo a quello di un circuito elettrico con la stessa topologia in cui scrivo per ogni maglia $\sum f = \sum RI$, in questo caso l'analogia è f=Ni $\rightarrow$ f.e.m.; $\mathcal{R} \rightarrow$ R ; $\phi \rightarrow I$; ho due modi diversi di risolverlo:

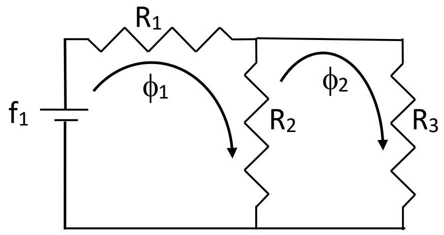
Considerando che $R_3 = R_1$ e che $R_2 = R_1/2$ (vedi i dati)

1) Il flusso generato in 1 da $f_1 = N_1 i_1$ si divide e va in parte in R_2 e in parte in R_3: $\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$

Nel ramo 1: $f_1 = \phi_1 \cdot R_{TOT}$, dove $R_{TOT} = R_1$ in serie a (R_2 in parallelo con R_3)=4/3 R_1

Inoltre deve essere $\phi_3 \cdot R_3 = \phi_2 \cdot R_2$ (i flussi, come le correnti, si dividono in maniera inversamente proporzionale alle Resistenze). Da cui si ha che $\phi_2 = f_1/2R_1$ e $B_2 = \frac{\emptyset_2}{S_2} = \frac{N_1 i_1 \mu_0 \mu_1 S_1}{2 L_1 S_2} = \frac{\pi}{2}$ mT

Alternativamente il problema si poteva fare risolvendo il circuito elettrico equivalente, in cui i flussi corrispondono alle correnti di maglia:



$$\begin{cases} f_1 = \phi_1 \cdot (R_1 + R_1/2) - \phi_2 \cdot R_1/2 \\ 0 = -\phi_1 \cdot R_1/2 + \phi_2 \cdot (R_1 + R_1/2) \end{cases}$$

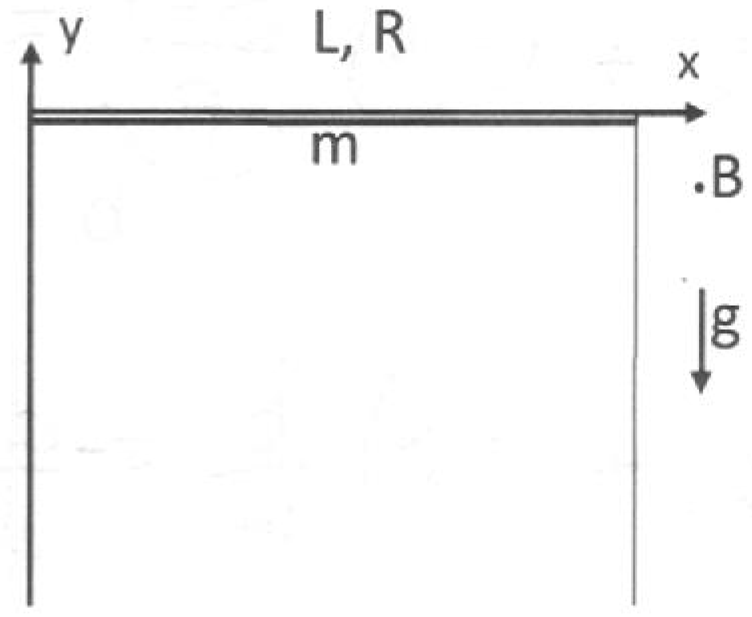
Attenzione: in questo caso il flusso attraverso l'elemento 2 è la differenza dei due flussi che l'attraversano, per cui: $\phi_{TOT}(2) = \phi_1 - \phi_2 = \frac{f_1}{2R_1}$ …come sopra.

L'esercizio è analogo a quello del libro di testo E.VI.9.

2) Essendo $R_3 = R_1$ entrambi i generatori di forza magnetomotrice genereranno lo stesso |flusso| nell'elemento 2 se avranno la stessa intensità. Dovendo essere il flusso totale uguale a zero, i due generatori dovranno essere uguali, ma con segno opposto, quindi $N_1 i_1 = -N_3 i_3$ dove nel disegno la corrente deve avere verso contraria alla i_3 disegnata.

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Si consideri il sistema mostrato in figura in cui una sbarretta conduttrice di lunghezza ***L*** e massa ***m*** può scorrere senza attrito lungo due guide verticali chiuse da un tratto di lunghezza ***L*** e resistenza ***R***. Tutte le altre resistenze del circuito sono trascurabili. Nello spazio è presente un campo di induzione magnetica ***B*** costante ed uniforme diretto secondo l'asse ***z***, e l'accelerazione di gravità ***g***. Se la sbarretta parte dalla posizione y ≅ 0 si calcoli la velocità che raggiungerà a regime ed in queste condizioni la potenza dissipata nel circuito.

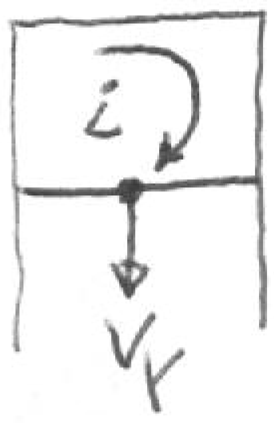


Dati: m= 10 g ; L = 10 cm ; B = √2 T ; R = 5 Ω

f.e.m. generata ai capi dalla sbarretta che cade:

$$f = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(y\cdot \ell \cdot B\right) = -v_y \ell B$$ che fa scorrere

una corrente $i = f/R$ in senso orario



Si genera quindi una forza sulla sbarretta: $\bar F = i\,\bar\ell \times \bar B = i \ell B\,\hat y = v_y (\ell B)^2/R\;\hat y$

Il moto è un moto di tipo viscoso (con attrito $\propto -\bar v$) in cui $\bar F_{TOT} = m\bar a = m\bar g + \bar v(\ell B)^2/R$; a regime

$\bar F_{TOT} = 0 \Rightarrow \bar a = 0 \Rightarrow |mg| = \left|v_\infty \frac{(\ell B)^2}{R}\right|$ da cui

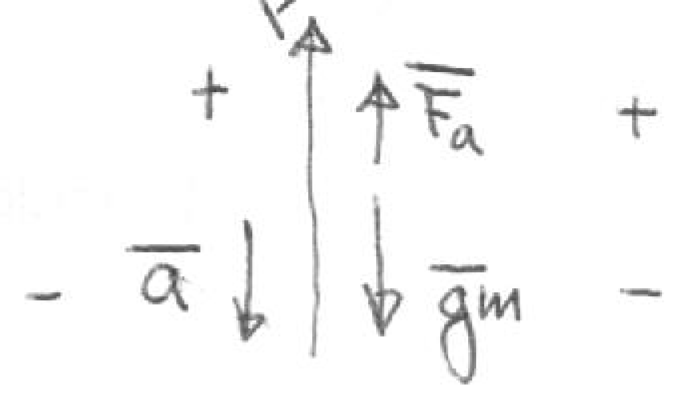
$$\bar v_\infty = \frac{mgR}{(\ell B)^2}\left(-\hat y\right) = \frac{10^{-2}\cdot 10\cdot 5}{(10^{-1}\cdot\sqrt2)^2} = 25 \text{ m/s } [-\hat y]$$

La potenza sarà $P^\infty = \frac{f_\infty^2}{R} = \frac{v_\infty^2(\ell B)^2}{R} =$

$$= \frac{(mg)^2 R^{\cancel{2}}\cancel{(\ell B)^2}}{(\ell B)^{\cancel{4}\,2}\,\cancel{R}} = R\left[\frac{mg}{\ell B}\right]^2 = 5\left[\frac{10^{-2}\cdot 10}{10^{-1}\sqrt2}\right]^2$$

$$= \frac{5}{2} = 2,5 \text{ W}$$

Calcolo esplicito



$$-mg + v(t)\underbrace{\frac{(\ell B)^2}{R}}_{b} = -m\frac{dv}{dt}$$

$$-g + v(t)\frac{b}{m} = -\frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{-g+v\frac{b}{m}} = -dt$$

$$\frac{m}{b}\int_{-g}^{-g+vb/m} d\left(-g+v\frac{b}{m}\right) = -dt \qquad \tau = m/b$$

$$\ln\frac{-g+v\,b/m}{-g} = -t/\tau \qquad -g+v\frac{b}{m} = -g\,e^{-t/\tau}$$

$$v = \frac{m}{b}g\left(1-e^{-t/\tau}\right) = v_\infty\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

$$v_\infty = g\tau$$