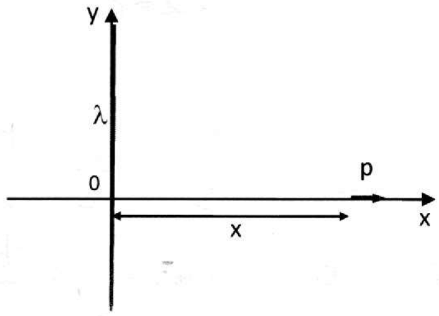
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Si consideri un filo virtualmente infinito su cui è depositata una densità di carica lineare uniforme λ, posto come in figura lungo l'asse y. Ad una distanza x dal filo è posto un dipolo elettrico $\bar{p} = q\delta\hat{x}$. Calcolare la forza ed il momento meccanico esercitati dal filo sul dipolo. Il disegno non è in scala.



Dati: $\lambda = 10^{-8}$ **C/m ; p= $4 \cdot 10^{-12}$ Cm ; q = 2 nC ; x = 4 cm**

Le due relazioni sono:

[7] $\bar{F} = \bar{\nabla}(\bar{E} \cdot \bar{p})$

[3] $\bar{M} = \bar{p} \times \bar{E}$

dove $\bar{E}$ è il campo elettrico generato dal filo che sarà $\bar{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{x}\hat{x}$; quindi $\bar{p} /\!/ \bar{E} \Rightarrow \bar{M} = 0$

Calcolo $\bar{F}$: $\bar{p} = (p;0,0)$, quindi $\bar{E} \cdot \bar{p} = E_x p_x$ [1]

e $\left[\nabla(\bar{E} \cdot \bar{p})\right]_x = F_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} p = \frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x} = -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x^2}$

Nota $p = q \cdot \delta \Rightarrow \delta = p/q = \frac{4\cdot 10^{-12}}{2\cdot 10^{-9}} = 2\cdot 10^{-3}\,m \ll x$

La Forza si può calcolare anche come somma delle forze sulle due cariche $\pm q$ $\; -q \xrightarrow[\delta]{} +q$

$$F_x = -\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (x+\delta)} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-\delta/x}{x\left(1+\frac{\delta}{x}\right)} =$$

$$= -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\cancel{\frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{x}\right)}}^{\simeq 1} = -\frac{4\cdot 10^{-12}\cdot \cancel{2}\cdot 9\cdot 10^{9}\cdot 10^{-8}}{\cancel{2}\,16 \times 10^{-4}} = 4{,}5\cdot 10^{-7}\,N$$

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Si consideri un condensatore formato da due superfici sferiche concentriche, di raggi a e b, nel vuoto; sulla superficie interna è depositata la carica Q, si calcoli:

[5] a) La distanza r* dal centro di simmetria entro la quale è contenuta la metà dell'energia elettrostatica posseduta dal sistema, per a e b generici.

[5] b) Il rapporto fra le densità di energia **medie** contenute ~~ai~~ nei volumi limitati da (a,r*) e (r*,b), nel caso che b=2a

Lo energia e.s. contenuta in un volume τ è

$$W_\tau = \int w(r)\, d\tau \quad \text{dove } w(r) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \text{ è la densità di energia}$$

a)

In questo caso si ha $w(r) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{r^2}$

quindi $$W_{TOTALE} = \int_a^b \frac{Q^2\varepsilon_0}{2(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{r^2}\underbrace{4\pi r^2 dr}_{d\tau} = \underbrace{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}}_{\alpha}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \alpha\,\frac{b-a}{ab}$$

Nella sfera di raggio r^*:

$$W(r^*) = \alpha\left[-\frac{1}{r}\right]_a^{r^*} = \alpha\,\frac{r^*-a}{ar^*} = \frac{1}{2}W_{TOT} = \frac{\alpha}{2}\,\frac{b-a}{ab}$$

da cui $$r^* = \frac{2ab}{a+b}$$

b)

Le due densità di energie medie sono $W^{Vol}_{TOT}/\text{Volume}$ $\quad r^*(b=2a) = \frac{4}{3}a$

$$\left.\begin{aligned}\overline{W}_1(a,r^*) &= \alpha\,\frac{r^*-a}{ar^*}\Big/\frac{4}{3}\pi\left(r^{*3}-a^3\right)\\ \overline{W}_2(r^*,b) &= \alpha\,\frac{b-r^*}{br^*}\Big/\frac{4}{3}\pi\left(b^3-r^{*3}\right)\end{aligned}\right\}\ \frac{\overline{W}_1}{\overline{W}_2} = \frac{(r^*-a)(b^3-r^{*3})\cdot b}{a(r^{*3}-a^3)(b-r^*)}$$

inserendo $r^* = \frac{4}{3}a$ e $b = 2a$

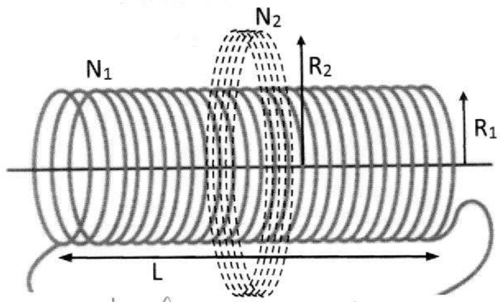
$$\frac{\overline{W}_1}{\overline{W}_2} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}}\left(\frac{8\cdot 27-64}{27}\right)\cdot \cancel{2}}{\left(\frac{64-27}{\cancel{27}}\right)\cdot\cancel{\frac{2}{3}}} = \frac{8(27-8)}{37} = 8\,\frac{19}{37} \simeq 8\cdot\frac{1}{2} \simeq 4$$

Prova scritta di Fisica 2 $N_1 = 10^3$ $L = 2\,m$ $\omega = 10^2$ rad/s $I_0 = 2A$ 6.9.2016

$R = 2\Omega$ $R_1 = 10\,cm$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

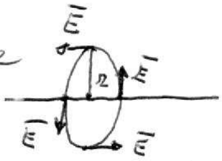
Un solenoide ideale, composto da N_1 spire avvolte su di una superficie cilindrica di raggio R_1, è percorso da una corrente $I(t) = I_0$ sen ωt. Intorno a questo solenoide è posta un bobina cilindrica, molto più corta, con $N_2=N_1/100$ spire, con un raggio R_2 ~~=2 R1~~ e dotata di una resistenza elettrica R. Determinare:



[6] a) L'espressione dell'intensità del campo elettrico all'interno del solenoide interno. ed il suo valore massimo

[4] b) La corrente elettrica che circola nella bobina esterna, supponendo che gli estremi vengano messi in contatto.

a) Il campo elettrico può essere calcolato integrandolo su di una circonferenza di raggio r e ponendola uguale alla f.e.m. indotta



$$\oint_{2\pi r} \bar{E}(r) \cdot d\bar{l} = f_i = -\frac{\partial \phi(B)_r}{\partial t} \qquad \text{dove } B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N_1}{L} I$$

$$E(r) \cdot 2\pi \cancel{r} = -\pi r^2 \mu_0 \frac{N_1}{L} \omega I_0 \cos\omega t$$

$$\text{da cui } E(r) = -\frac{r \mu_0 N_1}{2L} \omega I_0 \cos\omega t \ [2]$$

$$\left(E^{R_1}_{max} = \frac{R_1 \mu_0 N_1 \omega I_0}{2L} = \frac{10^{-1} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 2} = 2\pi\, 10^{-3}\ V/m \right)$$

b) La corrente indotta si può calcolare dalla $I_i = \frac{f_i}{R}$

dove $f_i = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ considerando che B è $\neq 0$ solo per $r \leq R_S$

$$|I_i| = \frac{1}{R} N_2 \pi R_1^2 \mu_0 \frac{N_1}{L} I_0 \omega \cos\omega t = \frac{10\ \cancel{10^3}\ \pi\ \cancel{10^{-2}}\ 4\pi \cdot 10^{-7}\ \cancel{2} \cdot \cancel{10^2}}{\cancel{2} \cdot 10^2 \cdot 2} \cos\omega t$$

$$= 2 \cdot 10^{-2} \cos\omega t \ \ A$$