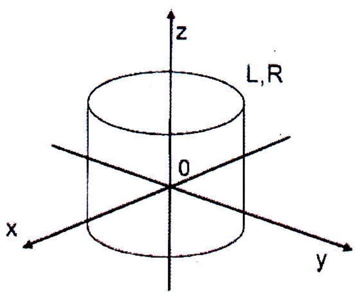
Prova scritta di Fisica 2 27.3.2017

Esercizio n.1 **[10 punti]**

Nello spazio vuoto è presente una distribuzione di carica costante $\rho(x,y,z)$ che genera un potenziale elettrostatico della forma $V=\beta\,(x^2+y^2)$, relativo al sistema di riferimento indicato in figura. Calcolare l'espressione del campo elettrico che genera questo potenziale (in modulo, verso e direzione) e calcolare l'energia elettrostatica presente all'interno del cilindro (indicato in figura) centrato rispetto all'origine, di raggio R ed altezza L. Determinare, giustificandola opportunamente, la forma analitica della distribuzione di carica $\rho(x,y,z)$.



Dati: $R = 10$ cm ; $L = 20$ cm ; $\beta = (3\sqrt{\pi})^{-1}\cdot 10^{-6}$ V/m²

1) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2\beta x \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2\beta y$

[0,5] $|E| = [E_x^2 + E_y^2]^{1/2} = 2\beta\sqrt{x^2+y^2} = 2\beta r \qquad \vec{E} = -2\beta\vec{r}$ ∴ T[3]

2) $U_{L,R} = \int_{L,R} dU = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot 2\pi r \cdot L\, dr = 4\pi\beta^2 L\varepsilon_0 \int_0^R r^3\, dr$ [1]

$= \pi\varepsilon_0\beta^2 L R^4 = \frac{\cancel{\pi}\cdot\cancel{9}\cdot 10^{-12}\, 10^{-12}}{\cancel{9}\cdot\cancel{\pi}\cdot 1}\, 0{,}2\cdot 10^{-4} = 2\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-24}$

$= 2\cdot 10^{-29}$ J ∴ T[3]

3) $\phi(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = -|E(r)|\cdot 2\pi r L$

$= -2\beta r\cdot 2\pi r L = -4\beta\pi L r^2 \propto -r^2$

$Q(r) = \int_0^r \rho(r)\, 2\pi r L\, dr \propto -r^2$

T[4] quindi $\rho(r) = -$ costante ∴

$\rho = \rho_0 \Rightarrow 2\pi L\rho_0 \frac{r^2}{2} = \varepsilon_0[-4\pi\beta L r^2]$

$\rho_0 = -4\beta\varepsilon_0$

oppure $\nabla^2 V(x,y,z) = -\rho/\varepsilon_0$

$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2\beta + 2\beta = 4\beta \Rightarrow \rho(x,y,z) = -4\beta\varepsilon_0$ [1]

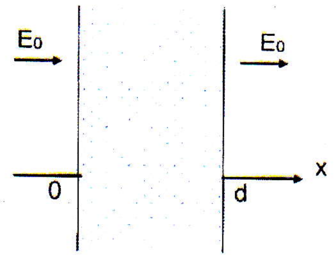
$=$ costante

Prova scritta di Fisica 2

27.3.2017

Esercizio n.2 **[10 punti]**

In una zona di spazio in cui è presente un campo elettrico costante ed uniforme E_0 viene posta una lastra di materiale dielettrico non omogeno di spessore d perpendicolare al campo E_0 (vedi figura). A causa del campo Elettrico E_0 il dielettrico si polarizza con una polarizzazione **P** parallela al campo E. All'interno del dielettrico si genera una carica di polarizzazione costante ρ_0. Considerando che la densità di carica di polarizzazione superficiale è trascurabile sulla faccia posta in x=0 si calcoli: 1) la polarizzazione P in funzione della x. 2) La densità di carica di polarizzazione sulla faccia posta in x=d. 3) Il campo elettrico interno alla lastra in funzione della x.



Dentro il dielettrico $\bar{E} = E\hat{x}$ [non c'è componente tangenziale]

$\Rightarrow \bar{P} = P\hat{x}$

[4] 1) $\rho_P = -\mathrm{div}\,\bar{P} = -\frac{dP_x}{dx} = -\rho_0$ quindi $dP_x = \rho_0\,dx$

$$\int_{P(x_0)}^{P(x)} dP(x) = \int_{x_0}^{x} \rho_0\,dx \Rightarrow P(x) - P(x_0) = \rho_0 x - \rho_0 x_0 \quad [1]$$

se $\sigma_p(0) = 0 \Rightarrow \sigma_p(0) = \bar{P}(0)\cdot\hat{n} = -P(0) = 0$ [1]

quindi $P(0) = 0 \Rightarrow P_x(x) - \cancel{P(x_0=0)} = \rho_0 x$ ∴ [1]

[2] 2) $\sigma_p(x=d) = \bar{P}(d)\cdot\bar{n} = P(d) = \rho_0 d$ ∴ [1]

[4] 3) Vale la legge $\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E} + \bar{P}$ quindi [D_n = costante $= \varepsilon_0\bar{E}_0$]

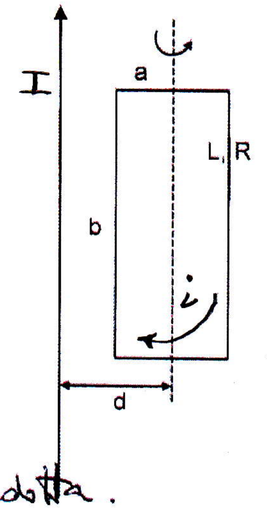
$$\bar{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\bar{D} - \bar{P}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon_0\bar{E}_0 - \rho_0\bar{x}\right)$$

$$= \left(E_0 - \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

Prova scritta di Fisica 2 27.3.2017

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Si consideri un filo infinito percorso da una corrente i. Accanto al filo è posta una spira conduttrice rettangolare di lati a e b, il cui asse si trova ad una distanza ~~media~~ d dal filo. La spira ha una resistenza R ed induttanza L, e può ruotare intorno ad un asse parallelo alla direzione del filo. La spira è inizialmente posta come in figura, con il piano individuato dalla spira passante per il filo. Supponendo che la spira compia una rotazione in verso antiorario di π, e che poi si fermi per un tempo sufficientemente lungo, si calcoli il valore della carica che avrà attraversato un qualunque tratto della spira alla fine del processo.



Dati: I **= 2 A ; a = d ; b = 20 cm ; d= 3 cm R = 4 kΩ**

L'equazione del circuito è

$$f_i = Ri + L\frac{di}{dt}$$ dove f_i è la f.e.m. indotta.

$$-\frac{d\phi}{dt} = Ri + L\frac{di}{dt} \Rightarrow -d\phi = Ri\,dt + L\,di$$

Integrando fra l'istante iniziale e quello finale

$$-\int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi = \int_{t_i}^{t_f} Ri\,dt + L\int_{i_i}^{i_f} di$$ essendo $i\,dt = dq$

$$-[\phi_f - \phi_i] = R[Q_f - Q_i] + \cancel{L[i_f - i_i]}^{=0}$$

quindi $Q_f - Q_i = \frac{\phi_i - \phi_f}{R} = \frac{2\phi_i}{R}$ $\quad \phi_f = -\phi_i$

$$\phi_i = \int d\phi = \int_{d-a/2}^{d+a/2} B(x)\cdot b \cdot dx = b\int \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{x}\,dx = \frac{\mu_0 b I}{2\pi}\ln\frac{d+a/2}{d-a/2}$$

$$\therefore \Rightarrow \Delta Q = \frac{\mu_0 b I}{\pi R}\ln\frac{d+a/2}{d-a/2} = \frac{4\pi 10^{-7}\, 2\cdot 10^{-1}\cdot 2}{\pi\, 4\cdot 10^{3}} \overbrace{\ln\frac{4,5}{1,5}}^{\sim 1}$$

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali. $= 4\cdot 10^{-11}$ C
Valori che potrebbero essere utili: