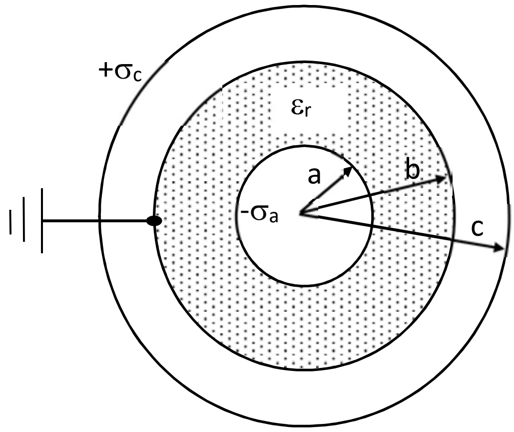
Esercizio n.1 **[12 punti]**

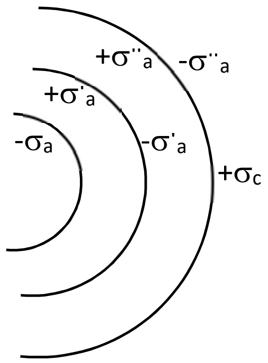
Si consideri il sistema composto da tre superfici sferiche concentriche conduttrici di raggi **a, b, c** (vedi figura). Lo spazio fra la sfera di raggio **a** e quella di raggio **b** è interamente riempito con un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r . Tutte le altre zone dello spazio sono nel vuoto. Sulla superficie della sfera di raggio **a** si trova una densità di carica superficiale **$-\sigma_a$** , mente sulla superficie sferica di raggio **c** è posta la densità di carica superficiale **$+\sigma_c$** . La parte esterna della superficie di raggio **b** viene collegata a massa (tramite un filo sottile che passa attraverso la superficie c senza toccarla). Si chiede di calcolare il valore del vettore campo Elettrico e del potenziale in tutte le quattro zone in cui è diviso lo spazio, e di fare il grafico corrispondente del campo elettrico e del potenziale fra zero e infinito.



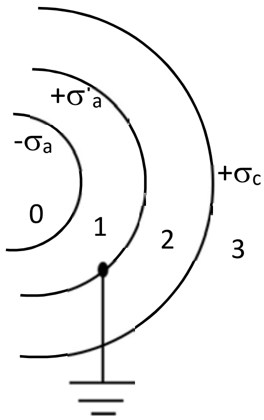
Soluzione

Il punto essenziale, che molti non hanno colto, sta nel fatto che mettere la superficie esterna di b a massa non vuol dire semplicemente imporre che su **b** il potenziale sia zero, ma comporta uno spostamento di cariche. Se non fosse chiaro si veda la discussione dettagliata sul Mencuccini- Silvestrini (pag.89) di cosa succede mettendo a massa una superficie sferica.

La situazione delle cariche del sistema – SENZA la massa - è questa, trascurando il dielettrico. Questa configurazione NON è quella finale.



Collegando la massa, la cariche sulla superficie esterna b si scaricano a terra e di conseguenza cambiano anche le altre: **Configurazione finale:**



Il problema si risolve scrivendo il campo elettrico nelle quattro zone 0, 1, 2, 3, per esempio con il teorema di Gauss, e poi calcolando il potenziale tramite la sua definizione $V(x) = -\int_c^x \bar{E}\cdot\overline{dx}$, raccordando poi i valori di V(x) passando da una zona all'altra.

0) $0 \le x \le a \therefore \bar{E}_0 = 0 \quad V_0 = c_0$ da determinare

1) $a \le x \le b \quad \bar{E}_1 = \frac{\bar{D}_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = -\frac{a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r x^2}\hat{x} \therefore V_1(x) = -\int^x \bar{E}_1 \cdot d\bar{x} =$

$$V_1(x) = -\frac{a^2\sigma_a}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{x} + c_1 \quad ; \quad V_1(b) = 0 = -\frac{a^2\sigma_a}{\varepsilon_0\varepsilon_r b} + c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{a^2\sigma_a}{\varepsilon_0\varepsilon_r b} \quad V_1(x) = -\frac{a^2\sigma_a}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right) \therefore$$

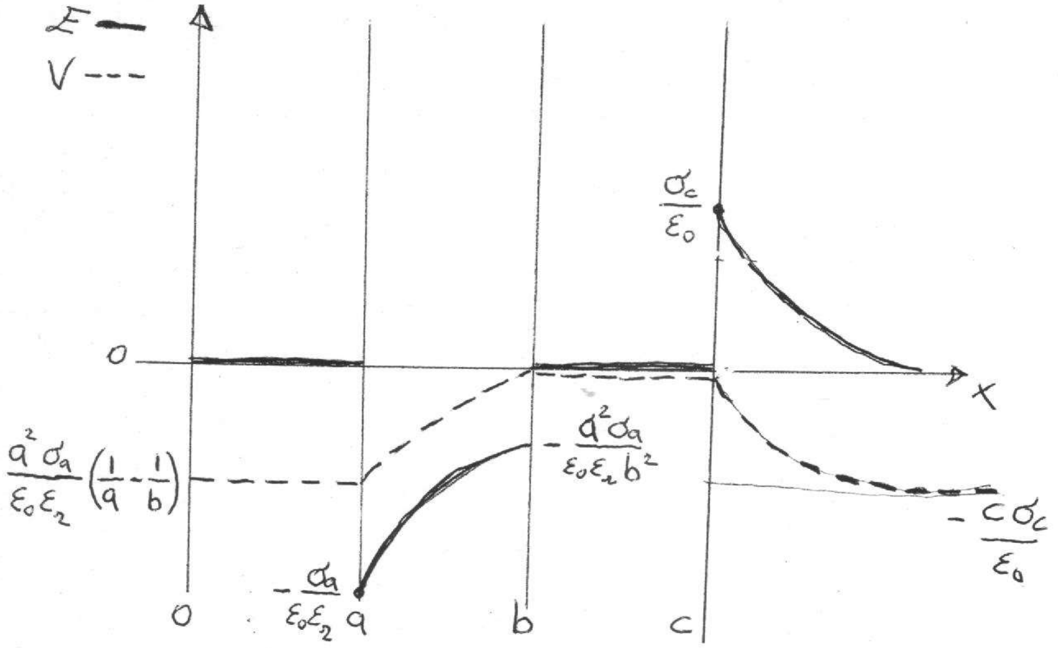
0) $V_0(a) = V_1(a) \quad c_0 = -\frac{a^2\sigma_a}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) < 0$

2) La carica interna è 0 : $E_2(x)=0 \quad V_2(x)=C_2=V_2(b)=0$ ∴
$b \leq x \leq c$

3) Dall'esterno vedo solo σ_c $\quad E_3(x)=\frac{c^2\sigma_c}{\varepsilon_0 x^2}$ ∴ $V_3(x)=\frac{c^2\sigma_c}{\varepsilon_0 x}+C_3$

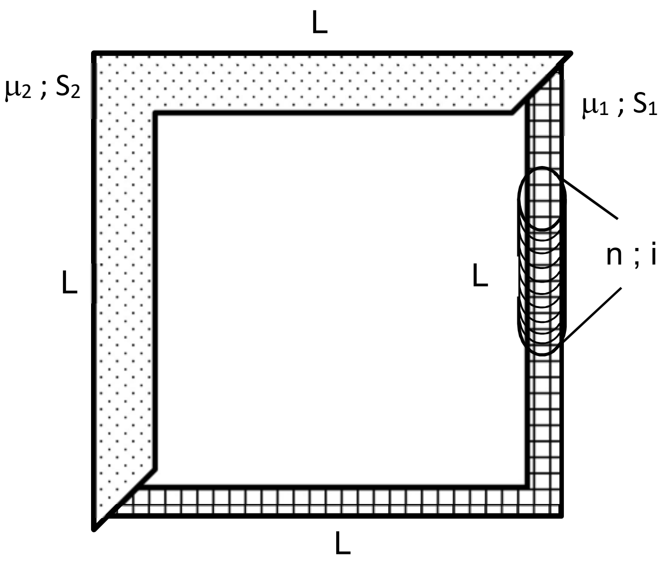
$$V_3(c)=V_2(c)=0 \Rightarrow C_3=-\frac{c^2\sigma_c}{\varepsilon_0 c}$$

$$\therefore V_3(x)=\frac{c^2\sigma_c}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right)$$



Esercizio n.2 **[9 punti]**

Si consideri il circuito magnetico chiuso mostrato in figura. Il circuito ha una forma quadrata con i lati di lunghezza **L,** ed è composto di due materiali ferromagnetici, uno di permeabilità magnetica relativa μ_1 e sezione S_1 e il secondo di permeabilità magnetica relativa μ_2 e sezione S_2. Entrambe le parti sono lunghe **2L**. Intorno al ferromagnete μ_1 è posto un solenoide con **n** spire**/metro** percorso da una corrente **i**. Calcolare il flusso del campo **B** concatenato con una spira avvolta intorno alla zona μ_2.



Dati: L = 10 cm ; μ_1=2μ_2=1500 ; S_2 =2 S_1= 1 cm^2 ;
n = 10^4 s/m ; i = 0,2 A.

ATTENZIONE: Nel testo c'è un errore: **n** non è il numero di spire/metro, come scritto, ma il numero di spire (totali).
Quindi a quelli di voi che hanno scritto correttamente le formule risolutive mancava un dato (la lunghezza).
Ho deciso di procedere così nella correzione dei vostri elaborati:
La soluzione implicava che si scrivesse correttamente la Legge di Hopkinson $F = \mathcal{R}\,\phi$, con F la forza magnetomotrice, ϕ il flusso di B, e che si scrivesse la riluttanza $\mathcal{R}$ come somma delle Riluttanze dei due tratti di materiale.
A chi ha scritto entrambe le relazioni corrette è stato dato il punteggio pieno (9/9) anche se non è arrivato al calcolo finale, quindi sia per chi ha lasciato indicato il valore di N=n/l…, che per chi ha scritto la lunghezza come la lunghezza totale del tratto di ferromagnete, che per chi ha lasciato inserito semplicemente il valore di n come se fosse il numero di spire.
A chi ha scritto solo la relazione della Riluttanza oppure la legge di Hopkinson ma con qualche errore è stato assegnato il punteggio di 4-5/9.

Soluzione

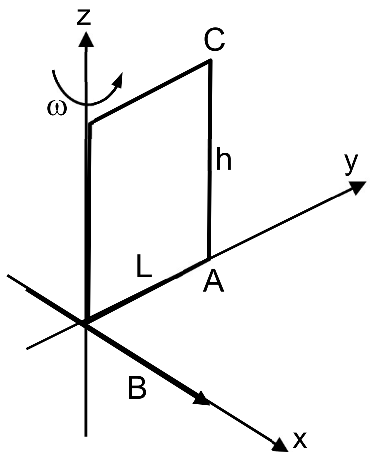
In un circuito ferromagnetico chiuso vale la legge di Hopkinson $F = \mathcal{R}\phi$ dove F è la forza magnetomotrice, R la riluttanza e ϕ il flusso di B.

In questo caso F=ni ; mentre R è la somma delle riluttanze dei due tratti di ferromagnete R = R_1 + R_2

Quindi $R = \frac{1}{\mu_0\mu_1}\frac{2L}{S_1} + \frac{1}{\mu_0\mu_2}\frac{2L}{S_2} = \frac{1}{\mu_0\mu_2}\frac{4L}{S_2}$; il flusso è costante in tutto il circuito, quindi il flusso in un qualunque punto sarà:

$$\phi = \frac{F}{\mathcal{R}} = \frac{ni\cdot\mu_0\mu_2\cdot S_2}{4L} = \frac{10^4\cdot 0{,}2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1.5\cdot 10^3\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^{-1}\cdot 2} = 1{,}5\,\pi\,10^{-4} \cong 5\cdot 10^{-4}\ Tm^2$$

Esercizio n.3 **[9 punti]**



Una spira rigida rettangolare, di sezione costante e lati h ed L, è posta come in figura e ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse z. In tutto lo spazio è presente un campo $\bar{B} = B\hat{x}$ costante ed uniforme. Il filo di cui è composta la spira ha una resistività per unità di lunghezza ρ. Calcolare il valore massimo (in modulo) della differenza di potenziale che si crea fra gli estremi A e C del lato verticale della spira.

Dati: h= 30 cm ; L=20 cm ; B=0,4 T ; ω=50 rad/s

Soluzione

Il flusso di B attraverso la spira che ruota rispetto al campo B è $\phi(\bar{B})_S = \bar{B} \cdot \bar{S} = B\ S\ \cos\omega t = BhL\ \cos\omega t$

Avendo assunto arbitrariamente che la spira al tempo t=0 si trova come in figura, quindi con $\hat{S}\ //\ \hat{B}$.

La variazione di ϕ nel tempo genera una f.e.m. indotta $f_i = -\frac{d\phi}{dt} = BhL\omega \sin\omega t$ (che va inserita nel circuito lungo il lato AC), nella spira scorrerà quindi una corrente $i = \frac{f_i}{R_T}$ essendo la R(totale) = R_T = ρ (2L+2h). Si noti che ρ è per unità di lunghezza, NON per unità di volume. Quindi la resistenza è R = ρ · lunghezza.

La d.d.p. fra A e C sarà:

$$\Delta V_{AC} = f_i - R_h i = f_i - f_i \frac{R_h}{R_T} = f_i \left(1 - \frac{\rho h}{\rho\,(2L+2h)}\right) = BhL\omega \left(1 - \frac{h}{2(L+h)}\right) \sin\omega t.$$

Il valore massimo di ΔV_{AC} si avrà quando $\sin\omega t = 1$:

$$|\Delta V_{AC}|_{MAX} = BhL\omega \left(1 - \frac{h}{2(L+h)}\right) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 50 \cdot (0{,}8) = 0{,}96 \cong 1\,Volt$$