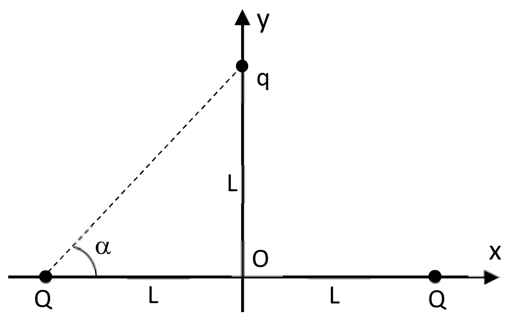
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Due cariche elettriche uguali Q>0 sono fissate sull'asse x a distanza 2L. Una terza carica q<0 è posta sull'asse y a distanza L dall'origine [quindi inizialmente $\alpha = 45^0$, vedi figura]. A) Trovare il punto sull'asse y in cui la forza cui è sottoposta la carica q è massima. B) Se la carica q viene lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla, calcolare il lavoro fatto dal campo Elettrico per portare questa carica dal punto y=L al punto y=0.
Nota: la posizione della carica q può essere individuata dall'angolo α oppure dalla coordinata y. Si può scegliere una delle due come variabile di posizione, ed ovviamente il risultato finale sarà lo stesso.
Dati: L = 10 cm ; Q = 1 nC ; q = - 1/9 nC



Soluzione

Le due forze che agiscono su q sono dirette secondo le rette qQ. Le componenti x si annullano, rimangono le due componenti y, uguali e dirette verso il basso.

Si ha $|F_Q| = k\frac{qQ}{R^2}$ dove $R = L/\cos\alpha$, questa, proiettata lungo la y e moltiplicata per 2 da la componente y della Forza totale:

$|\mathrm{F_{Q,Q}}| = 2\mathrm{k}\frac{\mathrm{qQ}}{\mathrm{L}^2}\cos^2\alpha \cdot \mathrm{sen}\alpha = \beta \cdot \cos^2\alpha \cdot \mathrm{sen}\alpha$; essendo $\beta = 2\mathrm{k}\frac{\mathrm{qQ}}{\mathrm{L}^2}$. Il massimo si trova imponendo che $\frac{\partial F}{\partial\alpha} = 0$.

$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\alpha} = \beta\cos\alpha\,(1 - 3\mathrm{sen}^2\alpha) = 0$. Una soluzione si ha per $\cos\alpha = 0$, quando q va all'infinito…è chiaramente un minimo.

La seconda soluzione è: $(1 - 3\mathrm{sen}^2\alpha) = 0$ che fornisce $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ cui corrisponde un valore y(max)= L tg α = L · 0,7 = 7 cm (vedi valori forniti per gli angoli).

Il lavoro fatto può essere calcolato dal potenziale: L=q·ΔV= q(V_{fin}-V_{in})=q(V(0)-V(L) essendo: $\mathrm{V}(0) = \frac{2\mathrm{kQ}}{\mathrm{L}}$; $\mathrm{V}(\mathrm{L}) = \frac{2\mathrm{kQ}}{\mathrm{L}\sqrt{2}}$
Quindi $\mathrm{L} = \frac{2\mathrm{kqQ}}{\mathrm{L}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong 4{,}2\ \mathrm{nJ}$

Il lavoro si può calcolare anche scrivendo $\mathrm{L} = \int_{\mathrm{L}}^{0}\overline{\mathrm{F}}\cdot\overline{\mathrm{dy}} = -\beta\int_{\mathrm{L}}^{0}\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{dy} = -\beta\mathrm{L}\int_{\alpha(\mathrm{L})}^{0}\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\beta\mathrm{L}}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right) = 4{,}2\ \mathrm{nJ}$

Se si usa la variabile y: $\mathrm{F_y(tot)} = 2\mathrm{kqQ}\frac{\mathrm{y}}{(\mathrm{L}^2+\mathrm{y}^2)^{3/2}}$: il massimo si ha per $\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\mathrm{y}} = 0 = \mathrm{L}^2 - 2\mathrm{y}^2$ da cui $\mathrm{y(max)} = \frac{\mathrm{L}}{\sqrt{2}}$

Analogamente, se si volesse calcolare il lavoro come $L = \int_L^0 \bar{F}\cdot\overline{dy}$

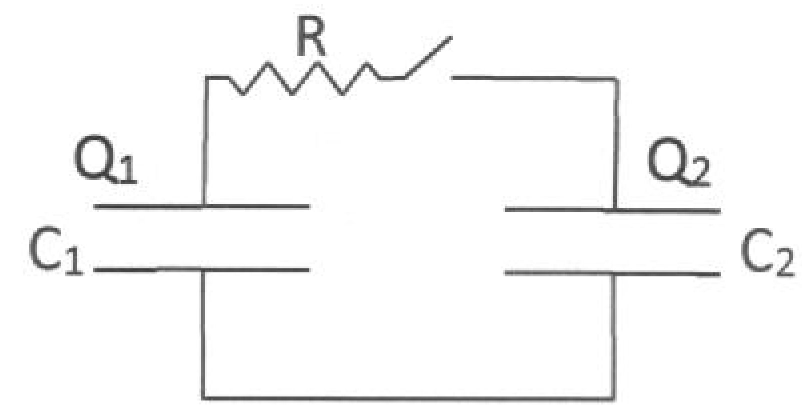
si avrebbe: $\mathrm{L} = \int_{\mathrm{L}}^{0}\overline{\mathrm{F}}\cdot\overline{\mathrm{dy}} = -2\mathrm{kqQ}\int_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}\frac{\mathrm{ydy}}{(\mathrm{L}^2+\mathrm{y}^2)^{3/2}} = -\mathrm{kqQ}\int_{2\mathrm{L}^2}^{\mathrm{L}^2}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{L}^2+\mathrm{y}^2)}{(\mathrm{L}^2+\mathrm{y}^2)^{3/2}} = \frac{2\mathrm{kqQ}}{\mathrm{L}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$… come sopra

Valori numerici di alcune funzioni trigonometriche:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \cong 35^0 \Rightarrow \tan\alpha \cong 0{,}7 \qquad ; \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \cong 55^0 \Rightarrow \tan\alpha \cong 1{,}4$$

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Consideriamo due condensatori di capacità C_1 e C_2 inizialmente caricati con cariche Q_1 e Q_2 ed isolati [vedi figura]. Se l'interruttore viene chiuso, dopo un tempo sufficientemente lungo il sistema si porta all'equilibrio. Si chiede di calcolare il valore della d.d.p. finale ai capi dei due condensatori e la variazione dell'energia elettrostatica di tutto il sistema fra l'istante iniziale e quello finale.



Dati: $C_1 = 1\ \mu F$; $C_2 = 2\ \mu F$; $Q_1 = Q_2 = 2\ nC$

Alla fine del processo, all'equilibrio, la d.d.p. ai capi delle due capacità sarà la stessa; le due capacità sono equivalenti al loro parallelo.

$$V_f = \frac{Q_f}{C_f} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\,nC}{3\,\mu F} = \frac{4}{3}\,10^{-3}\,V$$ [La carica si conserva]

Le energie sono:

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = 3 \cdot 10^{-12}\,J$$

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} C_f V_f^2 = \frac{1}{2}\cancel{(C_1 + C_2)}\frac{(Q_1+Q_2)^2}{(C_1+C_2)^{\cancel{2}}} = \frac{8}{3}\,10^{-12}\,J$$

da cui $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = -\frac{1}{3}\,10^{-12}\,J$

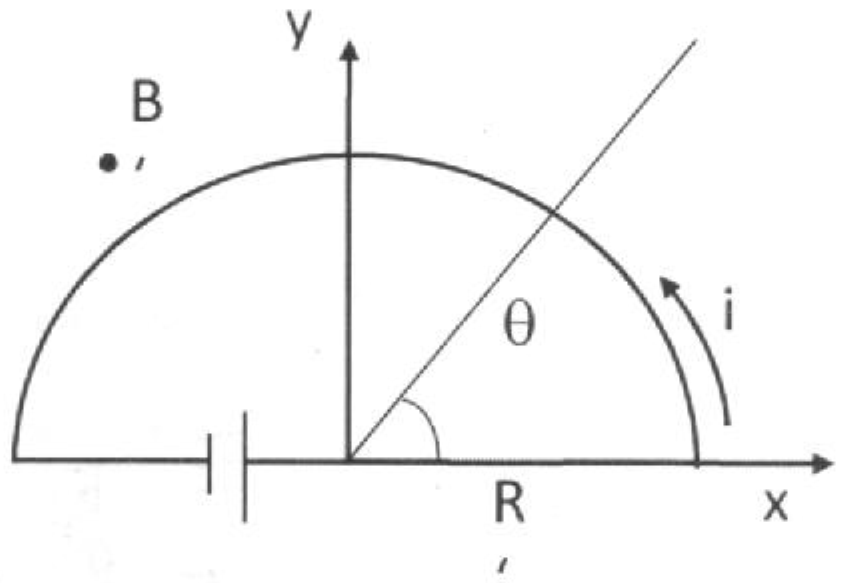
Il valore <u>deve</u> essere negativo perchè una parte si sarà dissipata in R

Prova scritta di Fisica 2 12.9.2017

Esercizio n.3 **[10 punti]**

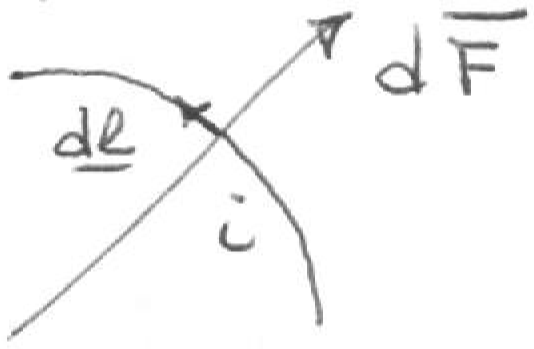
Nel piano x,y è posto un circuito elettrico rigico semicircolare di raggio R chiuso da un diametro percorso da una corrente costante i in verso antiorario. Nello spazio è presente un campo B perpendicolare al piano x,y il cui valore dipende dall'angolo θ (vedi figura): $\bar{B}(\theta) = B_0 \; \sin\theta \; \hat{z}$. Calcolare la forza totale, in modulo e in direzione, cui è sottoposto il circuito

Dati: i = 2 A ; R = 10 cm ; $B_0 = \pi$ T.



Sul diametro non si esercita nessuna forza dato che $\bar{B}(y=0) = 0$

Per ogni elemento dl della circonferenza si esercita una forza $d\bar{F} = i \, d\underline{l} \times \bar{B}$



[1] $= i \, dl \, B(\theta) \, \hat{\rho}$ [coordinata radiale]

La forza totale sarà 2 volte l'integrale di questa $d\bar{F}$ proiettata lungo l'asse y $\quad dF_{TOT} = 2 \, dF \, \text{sen}\,\theta$

$$F_{TOT} = 2 \int_{\text{quarto di circ.}} i \, B(\theta) \, \text{sen}\,\theta \, dl \quad . \quad \text{se } dl = R\,d\theta$$

$$= 2 i B_0 \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\theta \, \text{sen}\,\theta \, R \, d\theta = 2 i B_0 R \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\theta \, d\theta$$

$$= \cancel{2} i B_0 R \left[\frac{1}{\cancel{2}} \left(-\text{sen}\,\theta \cos\theta + \theta \right) \right]_0^{\pi/2} = i B_0 R \frac{\pi}{2} = \cancel{2} \pi \, 0{,}1 \frac{\pi}{\cancel{2}} \cong 1 \, N$$

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.

Integrali che potrebbero essere utili: $\int \text{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}(-\text{sen}\,x \cos x + \cancel{x}) + c$; $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\text{sen}\,x \cos x + \cancel{x}) + c$

$\text{sen}\,\alpha = 1/\sqrt{3} \to \alpha =$ $\quad \cos\alpha = 1/\sqrt{3} \to \alpha \cong 35^0$ $\quad \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \to \alpha =$