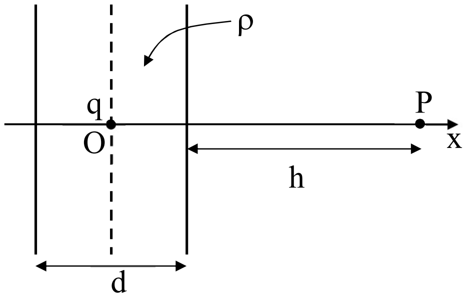
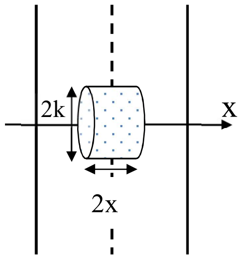
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Fra due piani paralleli infiniti a distanza ***d*** è posta una distribuzione di carica uniforme ρ. Nel piano mediano fra i due piani è posta una carica ***q***.
1) Calcolare l'espressione del campo elettrico in tutto lo spazio dovuto alla distribuzione di carica ρ e farne un grafico qualitativo. 2) Calcolare il lavoro fatto dalle forze del campo elettrostatico per spostare la carica ***q*** nel punto ***P***, esterno ai due piani e distante ***h*** dal piano più vicino.



Dati: q = 15 n C ; ρ = 10 nC/m³ ; d = 2 cm ; h = 3 cm

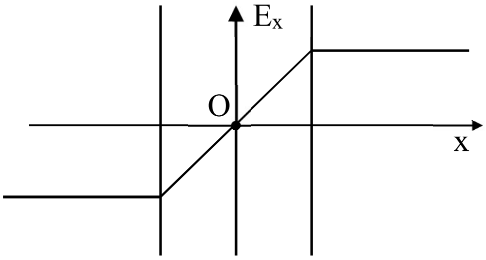
1a) Applicando il teorema di Gauss nell'intervallo 0≤x≤d/2 ad un cilindro di diametro 2k e altezza 2x centrato nell'origine:



$\phi(E) = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$ quindi $2\,E(x)\cdot \pi k^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\pi k^2 \cdot 2x$ da cui: $E(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x$

1b) Esternamente ai due piani per x≥d/2 ogni piano di spessore dx nella posizione x crea un campo costante ed uniforme:
$dE = \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}dx$ dove $d\sigma$ è la densità di carica superficiale infinitesima che si trova in una sottile fetta dx del volume carico.
Il campo di tutta la distribuzione avrà solo la componente x diversa da zero: $E(x) = \int dE = \int_{-d/2}^{d/2}\frac{\rho}{2\varepsilon_0}dx = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}d$

La parte di E con x≤0 ha lo stesso modulo, ma con segno opposto.



2) Il lavoro per unità di carica L/q sarà:

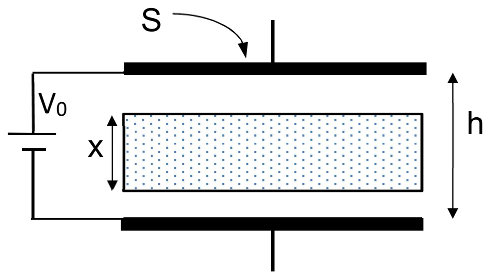
$$\frac{L}{q} = -\Delta V = -\big(V(P) - V(0)\big) = V(0) - V(P) = V(0) - V\left(\frac{d}{2}\right) + V\left(\frac{d}{2}\right) - V(0) = \int_0^{\frac{d}{2}} E(x)dx + \int_{\frac{d}{2}}^{P} E(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,x\;dx + \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}+h} \frac{\rho}{2\varepsilon_0}d\;dx = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{d^2}{4} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}h = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\left[\frac{d}{4} + h\right] = 0{,}4\ V$$

Il lavoro totale sarà quindi: $L = q\,\Delta V = 0{,}4 \cdot 15\ \cdot 10^{-9} = 6\ \cdot 10^{-9}\ J = 6\ nJ$

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Un condensatore piano di capacità $\boldsymbol{C_0}$, avente le armature di superficie S e distanti ***h,*** viene collegato ad un generatore di tensione $\boldsymbol{V_0}$. Una lastra di materiale conduttore di spessore ***x*** e con la stessa superficie delle armature del condensatore viene quindi inserita totalmente nel condensatore. Scrivere le espressioni delle seguenti grandezze:



1) La variazione relativa della capacità del condensatore. 2) La variazione di energia elettrostatica del condensatore. 3) Il lavoro fatto dal generatore. 4) Calcolarne i valori nel caso che ***x= h/2.***

Dati: $C_0 = 0{,}6\ \mu F$; $h = 1\ cm$; $V_0 = 1\ kV$

Soluzione

1) Il condensatore $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$ con la lastra conduttrice inserita è equivalente ad un condensatore con distanza fra le armature h - x quindi:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{h-x} = C_0 \frac{h}{h-x}$$

La variazione **relativa** della capacità è: $\frac{\Delta C}{C} = \frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{h}{h-x} - 1 = \frac{x}{h-x}$ $\therefore$ E' un numero adimensionale.

2) Il condensatore è sempre collegato al generatore di tensione, la tensione è quindi costante.
L'energia iniziale è: $U_i = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$, quella finale: $U_f = \frac{1}{2} C_1 V_0^2$, la variazione di energia sarà quindi:

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2} V_0^2 (C_1 - C_0) = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \left(\frac{h}{h-x} - 1\right) = U_i \frac{x}{h-x} \quad \therefore$$

3) Il lavoro fatto dal generatore è il doppio di quello che serve a caricare il condensatore (metà va nel condensatore e metà si dissipa all'interno del generatore):

quindi: $L_{gen} = 2\Delta U \quad \therefore$

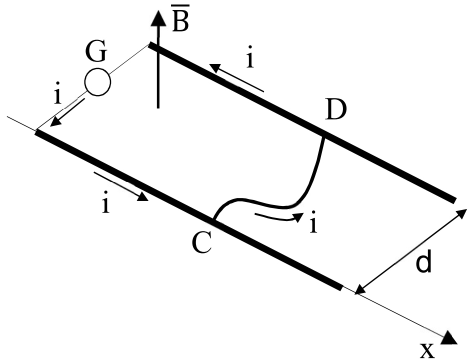
4) I valori numerici per x=h/2 saranno:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{h/_2}{h - h/_2} = 1 \quad \therefore$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \frac{h/_2}{h - h/_2} = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{6} = 0{,}3\, J \quad \therefore$$

$$L_{gen} = 2\Delta U = 0{,}6\, J \quad \therefore$$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

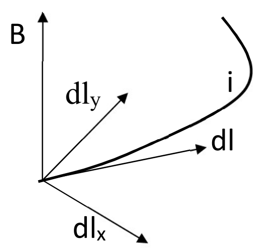


Un filo metallico rigido, quindi indeformabile, ha i due estremi C e D che possono scorrere senza attrito su due rotaie conduttrici orizzontali e parallele poste a distanza **d**. Tutto il sistema è posto in un campo magnetico **B** uniforme e verticale.

Il circuito è percorso da una corrente costante **i** fornita dal generatore **G**. Se la massa del filo metallico C-D è **m** calcolare la velocità del filo e lo spazio x percorso lungo le guide dopo un tempo $\mathbf{t_1}$ assumendo che all'istante t=0 il filo abbia velocità zero..

Dati: ***$d = 20$ cm ; $i = 2$ A ; $m = 2$ g ; $B_0 = 0{,}5$ T ; $t_1 = 0{,}1$ s***

Soluzione



A) Il filo CD percorso dalla corrente i e immerso in un campo B sarà sottoposto ad una forza $\bar{F}$ che dipende, punto per punto, dalla direzione del filo. Dato che il filo si può muovere solo in direzione x l'unica forza che può muovere il filo è la componente x della forza $\bar{F}$, quindi va calcolato il prodotto vettoriale punto per punto e poi calcolata la componete lungo l'asse x:

La relazione generale è: $d\bar{F} = i\, d\bar{l} \times \bar{B}$;perpendicolare a B, quindi con compenti solo x e y.

Quindi: $$F_x = \int dF_x = \int_C^D [d\bar{F}]_x = \int_C^D [i\, d\bar{l} \times \bar{B}]_x = i \int_C^D dy \cdot B = i\, B\, d$$

Scrivere direttamente F = iBd (senza passare per la proiezione del prodotto vettoriale e per il calcolo della componente lungo l'asse x) oppure approssimare CD = L ≅ d è un grave errore concettuale.

L'equazione del moto del filo di massa m, proiettata sull'asse x, è quindi:

$$F_x = ma_x = m\frac{dv(t)}{dt} \quad \text{quindi:} \quad dv(t) = \frac{F_x}{m}\,dt \quad \text{e:} \quad v(t) = \frac{F_x}{m}t + v(0) = \frac{F_x}{m}t \quad \therefore$$

$$v(t_i) = \frac{F_x}{m}t_1 = \frac{i\,B\,d}{m}t_1 = \frac{2\cdot 1\cdot 0{,}2}{2\cdot 2\cdot 10^{-3}}10^{-1} = 10 \text{ m/s} \quad \therefore$$

mentre lo spazio percorso si calcola dalla:

$$v(t) = \frac{F_x}{m}t = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{da cui:} \quad dx(t) = \frac{F_x}{m}t\;dt \quad \text{quindi:} \quad x(t) = \frac{F_x}{2m}t^{\,2} + x(0)$$

Lo spazio percorso è: $$x(t) - x(0) = \frac{F_x}{2m}t^{\,2} = \frac{i\,B\,d}{2m}t^2 \quad \therefore$$

che all'istante t_1 vale: $$x(t) = \frac{i\,B\,d}{2m}t_1^2 = \frac{v(t_1)}{2}t_1 = \frac{10}{2}\cdot\ 0{,}1 = 0{,}5 \text{ m} \quad \therefore$$

Nota: Il filo avrà ai suoi capi anche una f.e.m dovuta al flusso tagliato di B, ma questa f.e.m. non produce nessuna variazione della corrente dato che, come scritto nel testo, la corrente è costante. E anche se la desse non potreste calcolarla non essendo stato fornito il valore della resistenza del circuito. Quindi non va considerata.

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.
Le formule scritte vanno giustificate con due parole di spiegazione.