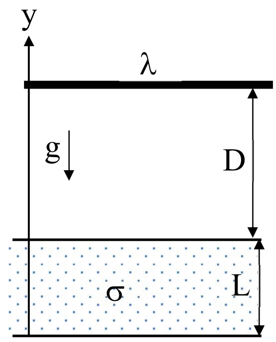
Prova scritta di Fisica 2 10.6.2019

Esercizio n.1 **[10 punti]**

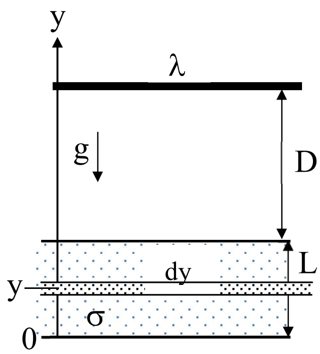
Un filo rettilineo indefinito viene caricato con una densità di carica lineare costante ed uniforme λ . Il filo si trova nel vuoto ad una distanza **D** dal bordo più vicino di una striscia rettilinea indefinita di spessore trascurabile e larga **L**, complanare con il filo e ad esso parallela. Sulla striscia è depositata una densità di carica superficiale costante ed uniforme σ. I due oggetti sono posti lungo la verticale (vedi figura). Calcolare 1) La forza elettrostatica per unità di lunghezza che viene esercitata dalla striscia sul filo. 2) La densità lineare di massa ρ_l che deve avere il filo perché si trovi all'equilibrio in presenza della forza di gravità nella posizione indicata. Esprimere il valore numerico in [g/m]



Dati: ***λ = 0,4 n C/cm ; σ = 9 nC/cm^2 ; D = 1 cm ; L = 1,72 cm.***

Soluzione

1) Consideriamo una sottile striscia dy all'interno della striscia carica. (vedi figura). Questa striscia, a distanza (D+L-y) dal filo carico, crea un campo elettrico: $dE = \frac{d\lambda'}{2\pi\varepsilon_0(D+L-y)}$ dove $d\lambda'$ è la carica per unità di lunghezza della striscia di altezza dy: $d\lambda' = \sigma dy$



Il campo totale E sul filo sarà quindi:

$$E = \int_0^L \frac{d\lambda'}{2\pi\varepsilon_0(D+L-y)} = \int_0^L \frac{\sigma dy}{2\pi\varepsilon_0(D+L-y)} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D+L}{D}$$

La forza elettrostatica (repulsiva) su di una lunghezza l del filo esercitata da questo campo Elettrico sarà:

$F = q(l)E = l\,\lambda\,E.$ La forza per unità di lunghezza sarà quindi: $\frac{F}{l} = \lambda\,E = \frac{\lambda\,\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D+L}{D}$ ∴

Numericamente: $\frac{F}{l} = \frac{0.4\cdot10^{-9}\cdot 9\cdot10^{-9}\cdot2\cdot9\cdot10^{9}}{10^{-2}\cdot 10^{-4}} \ln\frac{1+1,72}{1} \cong 65\ \cdot 10^{-3}\ N/m.$ ∴

2) La forza gravitazionale che si esercita su un tratto l del filo sarà: $F_g = m\cdot g = \rho_l \cdot l \cdot g$, diretta verso il basso. Il filo sarà in equilibrio se le due forze per unità di lunghezza saranno uguali in modulo e in verso contrario. Quindi se: $\frac{F}{l} = \frac{F_g}{l}$ o anche: $\rho_l \cdot g = \frac{\lambda\,\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D+L}{D}$

da cui si ha che l'equilibrio si ottiene se: $\rho_l = \frac{\lambda\,\sigma}{g\cdot 2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D+L}{D}$

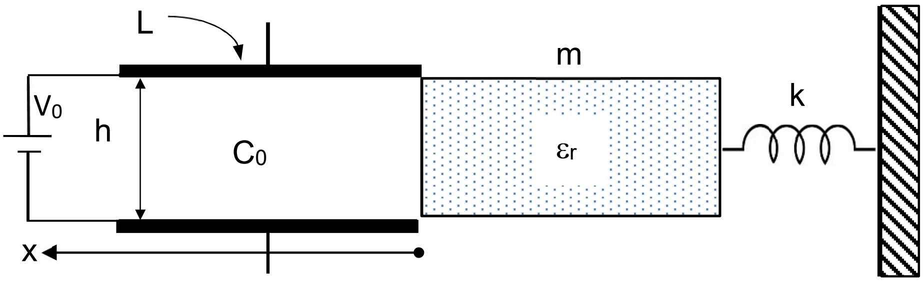
Numericamente: $\rho_l = \frac{F/_l}{g} \cong \frac{65\cdot10^{-3}}{10} = 6,5\ \cdot 10^{-3}\ {}^{kg}/_{m} = 6,5\ \ g/m$

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Consideriamo un condensatore piano $\mathbf{C_0}$ di superficie quadrata **LxL** e distanza fra le armature **h**, posto nel vuoto. Il condensatore viene alimentato con un generatore di tensione continua $\mathbf{V_0}$. Accanto ad esso è posta una lastra di materiale dielettrico di costante dielettrica ε_r delle stesse dimensioni della cavità interna del condensatore (appena più piccola per poterci scorrere dentro), di massa **m**, collegata ad una molla ideale di costante elastica **k** fissata a sua volta ad una superficie fissa. La molla è in condizione di allungamento nullo quando la lastra è appena al di fuori del condensatore. Il condensatore viene alimentato con un generatore di tensione continua $\mathbf{V_0}$. Calcolare 1) La posizione di equilibrio statico della lastra dielettrica all'interno del condensatore. 2) La frequenza delle piccole oscillazioni della lastra intorno alla posizione di equilibrio.

Dati:

C_0 = 4 n F ; L= 4 cm ; V_0 = 1 kV ;
ε_r = 3 ; k = 10 N/m ; m = 100 g



Soluzione

1) La lastra metallica è sottoposta ad una forza di origine elettrostatica in direzione x dovuta al campo creato nel condensatore carico. Questa forza F_x si può calcolare dall'energia elettrostatica del sistema (notare il segno):

$F_x = +\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}C(x)V_0^2\right)$ dove C(x) è la capacità del sistema supponendo che la lastra dielettrica sia entrata di un tratto x dentro al condensatore C_0. Si ha per le due capacità che ora formano il condensatore:

$C_x = \varepsilon_0\, \varepsilon_r \frac{Lx}{h}$, mentre: $C_{L-x} = \varepsilon_0\, \frac{L(L-x)}{h}$ queste due capacità sono in parallelo, quindi $C = C_x + C_{L-x}$

$C = \varepsilon_0\, \varepsilon_r \frac{Lx}{h} + \varepsilon_0\, \frac{L(L-x)}{h} = \varepsilon_0\, \frac{L}{h}[(\varepsilon_r - 1)x + L]$;

La forza sarà: $F_x = \frac{V_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_0\, \frac{L}{h}[(\varepsilon_r - 1)x + L]\right) = \frac{V_0^2}{2}\varepsilon_0\, \frac{L}{h}(\varepsilon_r - 1) = \frac{1}{2}C_0V_0^2\frac{\varepsilon_r - 1}{L}$ dove $C_0 = \varepsilon_0\frac{L^2}{h}$ è la capacità inziale del condensatore senza dielettrico all'interno.

L'equilibrio si avrà quando F_x= - F_{molla}=kx, quindi per: $x^* = \frac{1}{2}C_0V_0^2\frac{\varepsilon_r - 1}{L\cdot k} = \frac{4\cdot 10^{-9}\cdot 2\cdot 10^6}{2\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot 10} = 10^{-2}\, m = 1\, cm$

Nota 1: per calcolare la posizione di equilibrio si può utilizzare anche l'Energia, ma tenendo conto che l'energia elettrostatica di C è aumentata, e anche quella potenziale della molla… quindi non possono essere uguagliate! L'energia viene dal contributo del generatore che quindi va inserito nel bilancio energetico. [Vedi testo VII.7.1]

2) La forza totale che agisce sulla sbarretta, per una posizione x generica, è: $F_T = -kx + \frac{1}{2}C_0V_0^2\frac{\varepsilon_r - 1}{L}$, la parte costante non contribuisce alla frequenza delle oscillazioni, sposta solo la posizione intorno a cui avvengono.

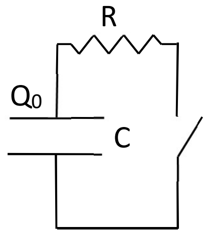
   La frequenza delle oscillazioni (se limitate all'interno del condensatore) sarà: $\upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

   Numericamente: $\upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{10}{0{,}1}} = \frac{10}{6{,}28} \cong 1{,}7\, Hz$

Nota 2: Per poter calcolare la pulsazione tramite la relazione $\omega = \sqrt{k/m}$ è necessario aver dimostrato che la forza in funzione della x non dipende dalle caratteristiche del condensatore, come sarebbe se il condensatore fosse a carica costante.

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un condensatore piano ideale **C**, collegato ad una resistenza **R** tramite un interruttore (vedi figura), viene caricato con una carica $\mathbf{Q_0}$. Inizialmente l'interruttore è aperto. All'istante t=0 l'interruttore viene chiuso e il condensatore si scarica sulla resistenza R. Calcolare: 1) L'espressione della corrente i(t) che attraversa la resistenza R e il suo valore per $t=t^*$ 2) L'espressione della corrente di spostamento $i_S(t)$ presente fra le armature del condensatore. 3) Il rapporto $i(t^*)/i_s(t^*)$.



Dati: ***$C = 1$ nF ; $R=1$ MΩ ; $Q_0 = 1$ μC ; $t^* = 1$ ms.***

Soluzione

1) Durante la scarica del condensatore la carica Q sulle armature varia secondo la legge:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad \text{dove: } \tau = RC = 1\,ms$$

Quindi la corrente che attraversa la resistenza R, se q = - Q è la carica che passa in essa è:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Per $t=t^*=\tau$ si avrà:

$$i(\tau) = \frac{Q_0}{\tau} e^{-1} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-3}} \frac{1}{2{,}72} = \frac{10^{-3}}{2{,}72} \cong 0{,}3\,mA$$

2) La corrente di spostamento sarà:

$i_s(t) = J_s(t) \cdot S$ dove S è l'area delle superfici del condensatore e $J_s(t)$ la densità della corrente di spostamento: $J_s(t) = \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E(t)}{\partial t}$

Il campo Elettrico si può calcolare dalla densità di carica $\sigma(t)$ presente sulle superfici del condensatore:

$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{S \cdot \varepsilon_0} = \frac{Q_0 e^{-t/\tau}}{S \cdot \varepsilon_0}$ per cui. $|J_s(t)| = \left|\varepsilon_0 \frac{\partial E(t)}{\partial t}\right| = \frac{Q_0 e^{-t/\tau}}{S \cdot \tau}$,

la corrente di spostamento è quindi: $i_s(t) = \frac{Q_0 e^{-t/\tau}}{\tau}$.

Metodo alternativo: $i_s(t) = \phi(\bar{J}_S) = \phi\left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\bar{D}) = \frac{\partial}{\partial t} q(t) = \frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$

3) Dai calcoli si può vedere che la corrente di spostamento, come deve essere per l'equazione di continuità, è uguale alla corrente di conduzione, essendo in serie sullo stesso ramo, quindi il loro rapporto deve valere 1 per ogni istante t.

$$i(t^*)/i_s(t^*) = 1$$

Nota: scrivere solo: $i(t^*)/i_s(t^*) = 1$ senza giustificarlo con le formule o con considerazioni fisiche non è sufficiente.

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.
Le formule scritte vanno giustificate con qualche parola di spiegazione. Formule senza alcuna spiegazione non verranno prese in considerazione.