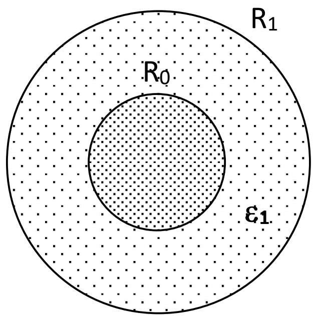
Esercizio n.1 **[10 punti]**

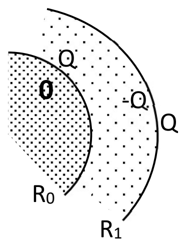


Nello spazio sono presenti due superfici sferiche concentriche di raggi R_0 e R_1 . La sfera interna di raggio R_0 è conduttrice e su di essa è stata posta la carica elettrica Q. La corona sferica di raggio minore R_0 e raggio maggiore R_1 è composta da un isolante di costante dielettrica relativa ε_1. La superficie sferica di raggio R_1 è realizzata con un materiale conduttore. All'esterno c'è il vuoto. Determinare A) I valori delle cariche elettriche di conduzione presenti su tutte le superfici del sistema; fare un disegno schematico. B) Le espressioni del campo elettrico presente in tutto lo spazio, farne un grafico quantitativamente corretto e scrivere le espressioni del campo nei punti R_0 e R_1 . C) L'energia elettrostatica di tutto il sistema.

Dati: R_0 = 4,5 cm ; R_1 = 2 R_0 ; Q =2 nC ; ε_1 =2

Soluzione

A) Per induzione appaiono delle cariche sulle superfici interna ed esterna della circonferenza R_1

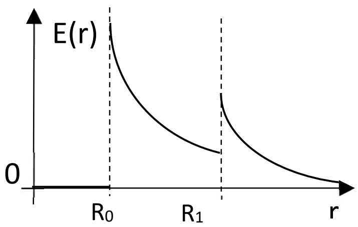


B) Per calcolare il campo E si può applicare il teorema di Gauss nelle tre zone in cui è diviso lo spazio

$R<R_0$: $Q_i = 0 \rightarrow \bar{E} = 0$

$R_0 \leq r < R_1$: $Q_i = Q \rightarrow \bar{E} = \frac{k}{\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}$ dove $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$r \geq R_1$: $Q_i = Q \rightarrow \bar{E} = k\frac{Q}{r^2}$



$$E(R_0^-) = 0$$
$$E(R_0^+) = \frac{1}{2}\frac{kQ}{R_0^2}$$
$$E(R_1^-) = \frac{1}{8}\frac{kQ}{R_0^2}$$
$$E(R_1^+) = \frac{1}{4}\frac{kQ}{R_0^2}$$

Il campo è radiale dappertutto.

C) L'energia e.s. nelle tre zone in cui è diviso lo spazio sarà:

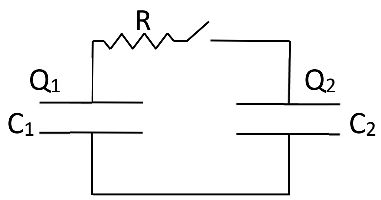
- $r \leq R_0$: $E = 0 \rightarrow \mathcal{E}_{O,0} = 0$
- $R_0 \leq r \leq R_1$: $\mathcal{E}_{0,1} = \int_{R_0}^{R_1} d\mathcal{E} = \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 d\tau = \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \left(\frac{k}{\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi{}_0\varepsilon_r}\int_{R_0}^{R_1}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\frac{-1}{r}\right]_{R_0}^{R_1} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{R_0}$
- $r \geq R_1$: $\mathcal{E}_{1,\infty} = \int_{R_1}^{\infty} d\mathcal{E} = \int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 d\tau = \int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(k\frac{Q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_0}$

L'energia totale sarà quindi:

$$\mathcal{E}_{TOT} = \mathcal{E}_{0,1} + \mathcal{E}_{1,\infty} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{R_0} + \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_0} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}+1\right) = \frac{4\cdot 10^{-18}\cdot 10^2}{16\cdot\pi\cdot 9\cdot 10^{-12}\cdot 4{,}5}\frac{3}{2} \cong \frac{1}{\pi}10^{-6} \cong 0{,}3\ \mu J \quad \therefore$$

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Consideriamo due condensatori di capacità C_1 e C_2 inizialmente caricati con cariche Q_1 e Q_2 ed isolati [vedi figura]. L'interruttore viene chiuso all'istante t=0; dopo un tempo sufficientemente lungo ($t \to \infty$) il sistema si porta all'equilibrio.



Calcolare: A) Il valore della d.d.p. finale ai capi dei due condensatori. B) La variazione dell'energia elettrostatica di tutto il sistema dall'istante iniziale a quello finale.

C) L'energia dissipata nella resistenza R durante tutto il processo.

Dati: $C_1 = 1\ \mu F$; $C_2 = 2\ C_1$; $Q_1 = Q_2 = 2\ nC$
Nota: le energie coinvolte sono molto piccole.

Soluzione

A) Dopo la chiusura dell'interruttore fra i due condensatori scorrerà una corrente per rendere uguali le ddp ai capi dei due condensatori, che inizialmente erano diverse. Alla fine del processo si avranno le due capacità, che possono essere considerate in parallelo (Nota: NON in serie, i due condensatori hanno le due facce in comune e alla fine la stessa differenza di potenziale), con la stessa ddp V_f ai loro capi; tutto il sistema sarà quindi equivalente ad una sola capacità C_f caricata con la carica iniziale posseduta dal sistema; la carica in questo sistema si conserva, non c'è modo di annullare le cariche positive con quelle negative.

Quindi: $V_f = \frac{Q_f}{C_f}$ essendo: $Q_f = Q_1 + Q_2 \;\; e \;\; C_f = C_1 + C_2$, da cui $V_f = \frac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2} = \frac{2Q_1}{3C_1} = \frac{2\cdot 2\cdot 10^{-9}}{3\cdot 10^{-6}} = \frac{4}{3}\cdot 10^{-3} \cong 1{,}3\ mV \;\; \therefore$

B) L'energia iniziale sarà la somma delle energie e.s. associate ai due condensatori carichi:

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_1^2}{2C_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\frac{Q_1^2}{C_1}$$

L'energia finale sarà l'energia e.s. associata al condensatore equivalente C_f:

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}\frac{Q_f^2}{C_f} = \frac{1}{2}\frac{(Q_1+Q_2)^2}{C_1+C_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4Q_1^2}{3C_1} = \frac{2Q_1^2}{3C_1}$$

La variazione di Energia nel processo sarà (attenti al segno):

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \frac{2Q_1^2}{3C_1} - \frac{3}{4}\frac{Q_1^2}{C_1} = \frac{Q_1^2}{C_1}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{4\cdot 10^{-18}}{10^{-6}}\frac{1}{12} = -\frac{1}{3}10^{-12} \cong -0{,}3\cdot 10^{-12} = -0{,}3\ pJ \quad \therefore$$

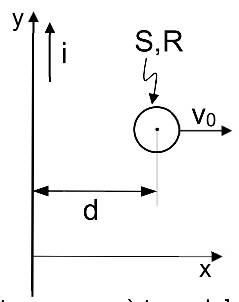
Il valore della variazione dell'energia e.s. DEVE essere minore di zero; l'energia e.s. non si conserva in questo processo.

C) Per la conservazione dell'energia, l'energia dissipata nella resistenza sarà uguale (**e di segno opposto**) alla variazione dell'energia e.s.:

$$\mathcal{E}(R) = -\Delta\mathcal{E} = 0{,}3\cdot 10^{-12} = 0{,}3\ pJ \;\; \therefore$$

Esercizio n.3 [10 punti]

Si consideri un filo infinito, posto lungo l'asse y, percorso da una corrente costante ***i*** ed una piccola spira circolare, di superficie ***S*** e resistenza elettrica ***R***, posta nel piano xy con l'asse perpendicolare al filo a distanza ***d*** dal filo al tempo t=0. Per t>0 la spira si muoverà nella direzione x con velocità costante $\boldsymbol{v_0}$ sotto l'azione di una forza esterna [vedi figura]. A) Si scriva l'espressione della f.e.m indotta nella spira in funzione del tempo. B) Si calcoli il lavoro necessario per portare la spira con velocità costante $\boldsymbol{v_0}$ dalla posizione ***d*** fino all'infinito.



[il disegno non è in scala]

Dati: i = 50 *A* ; S = 1 *cm²* ; R = 1 *mΩ* ; d = 10 *cm* ; v_0 = 30 *m/s*

Nota: con i valori numerici forniti il lavoro relativo alla domanda B sarà numericamente molto piccolo.

Soluzione

La spira che si muove è immersa nel campo B prodotto dal filo, quindi vede un flusso di B variabile con la posizione e quindi nel tempo; questa variazione provoca una f.e.m. indotta che fa scorrere una corrente nella spira. Il lavoro necessario per spostare la spira è pari all'energia dissipata per effetto Joule nella spira per tutta la durata del processo considerato.

La distanza x del centro della spira dal filo è inizialmente d, poi aumenta, quindi la distanza x è almeno 10 volte il raggio del filo. Il campo B può quindi essere considerato costante all'interno della spira.

Il flusso di B concatenato con la spira è: $\phi(\overline{B}) \cong \overline{B}(x(t)) \cdot \overline{S} = B(x(t))S = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i\cdot S}{x(t)}$ dove $x(t)=d+v_0 t$.

La f.e.m indotta sarà: $f = -\frac{d\phi(\overline{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 i\cdot S}{2\pi}\frac{d}{dt}\frac{1}{x(t)} = \frac{\mu_0 i\cdot S}{2\pi}\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 i\cdot S}{2\pi}\frac{1}{x^2}v_0$

L'energia dissipata sarà l'integrale della potenza dissipata W in dt:

$$E = \int W dt = \int_0^\infty \frac{f^2}{R}dt = \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 i\cdot S}{2\pi}v_0\right]^2\int_0^\infty\frac{1}{x^4}\,dt = \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 i\cdot S}{2\pi}v_0\right]^2\int_0^\infty\frac{dt}{(d+v_0 t)^4} = \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 i\cdot S}{2\pi}\right]^2\frac{v_0}{3d^3} = \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 i\cdot S}{2\pi\, d}\right]^2\frac{v_0}{3d} =$$

$$= 10^3\cdot\left[\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\; 50\cdot 10^{-4}}{2\pi\cdot 10^{-1}}\right]^2\cdot\frac{30}{3\;10^{-1}} = 10^3\cdot 10^{-16}\cdot 10^2 = 10^{-11}\ J = 10\ pJ \quad\therefore$$