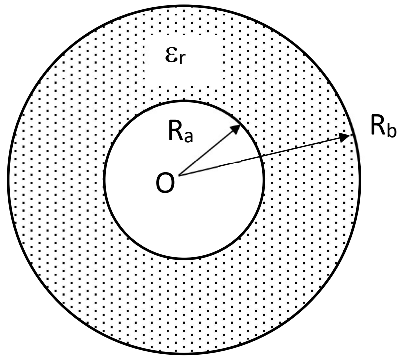
Esercizio n.1 [15 punti]



Una carica Q viene posta su di una sfera conduttrice di raggio R_a. Intorno alla sfera è posta una corona sferica isolante di raggio interno R_a, raggio esterno R_b e costante dielettrica relativa ε_r. La corona sferica è limitata all'esterno da una sottile superficie conduttrice di raggio R_b.

Si chiede:

1) Scrivere l'espressione analitica del campo elettrico e del potenziale elettrostatico in tutto lo spazio.

2) Calcolarli nei punti $r = 0$; $r = R_a$; $r = R_b$.

3) Disegnare l'andamento qualitativo del campo elettrico e del potenziale elettrostatico in funzione della distanza dal centro della sfera.

4) Supponendo ora di mettere a massa la superficie esterna di raggio R_b (collegandola ad un punto che abbia nominalmente potenziale V=0), disegnare nuovamente gli andamenti qualitativi (quindi senza necessariamente scrivere le formule) del campo elettrico e del potenziale elettrostatico nelle tre zone di spazio in questa nuova configurazione.

Dati: $R_a = 1$ cm , $R_b= 2$ cm , $Q= 9\cdot$ nC , $\varepsilon_r=1{,}5$.

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.

Soluzione

1) Calcolo del campo Elettrico:

La legge di Gauss è $\phi(\bar{D})_S = \sum Q(\text{interne})$ che, scritta nelle tre zone in cui è diviso lo spazio (0,1,2: vedi figura) diventa, tenendo conto che per la simmetria del problema i campi sono radiali:

zona 0) $\quad r < R_a \qquad \phi(\bar{D}_0) = 0 \quad ; \quad D_0 = 0 \quad ; \quad E_0 = 0$

zona 1) $\quad R_a \le r < R_b \quad \phi(\bar{D}_1) = Q \quad ; \quad D_1(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad ; \quad E_1(r) = \frac{D_1(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

zona 2) $\quad r \ge R_b \qquad \phi(\bar{D}_2) = Q \quad ; \quad D_2(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad ; \quad E_2(r) = \frac{D_2(r)}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Calcolo del potenziale V(r):

zona 0) $\quad r \le R_a \qquad V_0(r) = -\int^r E_0(r)dr + C_0 = C_0 \qquad (0)$

zona 1) $\quad R_a \le r \le R_b \qquad V_1(r) = -\int^r E_1(r)dr + C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} + C_1 \qquad (1)$

zona 2) $\quad R_b \le r \qquad V_2(r) = -\int^r E_2(r)dr + C_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 \qquad (2)$

2) Valori numerici e calcolo delle costanti C_i:

Campo Elettrico:

$$E_1(0) = 0\,; \quad E_1(R_a^-) = 0 \quad ; \quad E_1(R_a^+) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(R_a)^2} = \frac{9\cdot 10^{-9}\cdot 9\cdot 10^{9}}{1{,}5\,\cdot 1\cdot 10^{-4}} \cong 5{,}4\,\cdot 10^{5}\ \mathrm{V/m}$$

$$E_1(R_b^-) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(R_b)^2} = \frac{9\cdot 10^{-9}\cdot 9\cdot 10^{9}}{1{,}5\ \cdot(2\cdot 10^{-2})^2} \cong 1{,}35\ \cdot 10^5\ \mathrm{V/m} \quad ; \quad E_2(R_b^+) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_b)^2} \cong 2{,}2\ \cdot 10^5\ \mathrm{V/m}$$

Potenziale: imponendo che V(r) sia nullo all'infinito e la continuità di V(r) al passaggio da un mezzo all'altro, si ha:

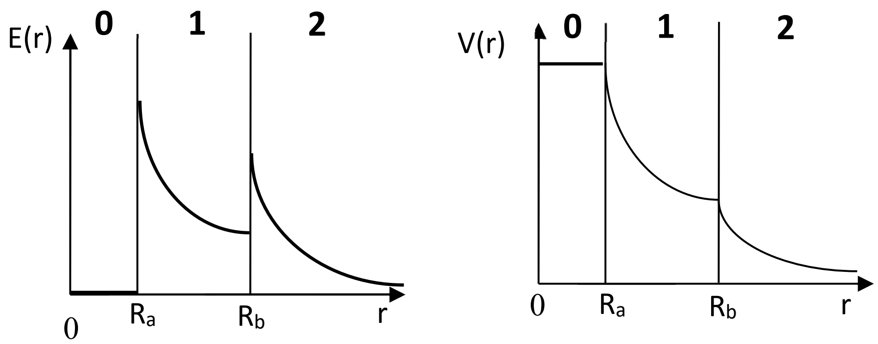
$$\text{dalla (2):} \quad V_2(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

dalla (1) e (2): $V_1(R_b) = V_2(R_b) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_b} = \frac{9\cdot 10^{-9}(1{,}5-1)\cdot 9\cdot 10^{9}}{1{,}5\cdot 2\cdot 10^{-2}} = 1{,}35\ \ \mathrm{kV}$

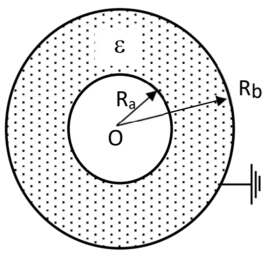
dalla (0) e (1): $V_0(R_a) = V_1(R_a) \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\frac{1}{R_a} + \frac{\varepsilon_r - 1}{R_b}\right] = 6{,}75\ \ \mathrm{kV}$

$V(0) = 6{,}75\ \ \mathrm{kV}$; $V(R_a) = 6{,}75\ \ \mathrm{kV}$; $V(R_b) = 4{,}05\ \ \mathrm{kV}$

3) Andamento del campo Elettrico e del potenziale:

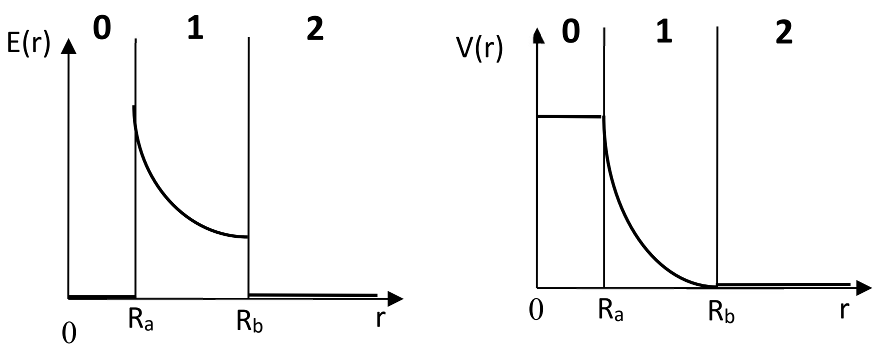


4) Andamento del campo Elettrico e del potenziale avendo posto $V(R_b)=0$



In questo caso la carica Q che era stata indotta sulla superficie esterna di raggio R_b si scarica a massa e il sistema diventa elettricamente neutro.

Il grafico del potenziale viene traslato verso il basso, con V=0 per $r>R_b$; il campo elettrico diventa nullo per $r>R_b$.



Esercizio n.2

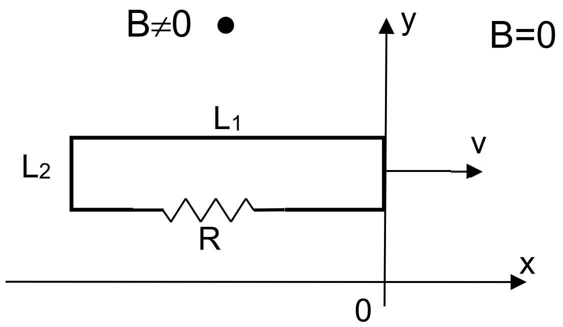
Un campo magnetico $\bar{B} = B\hat{z}$ costante ed uniforme è presente nella metà di spazio in cui *x<0*. Una spira rettangolare di lati L_1 ed L_2 e resistenza elettrica *R*, è disposta nel piano xy, all'istante t=0, come in figura. Supponendo di estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico muovendola con velocità costante nella direzione x: $\bar{v} = v\ \hat{x}$, si calcoli:

A) L'espressione ed il valore della corrente indotta nella spira ed il verso in cui circolerà.

B) Il lavoro necessario per estrarre completamente la spira dalla zona in cui il campo B è diverso da zero. Si trascuri l'induttanza del circuito.

C) L'espressione (quindi senza fare il calcolo) dell'energia dissipata per effetto Joule nella resistenza R della spira dall'istante iniziale fino a quando la spira sarà stata estratta completamente dalla zona in cui B≠0

Dati: l_1=10 cm ; l_2= 2 cm ; R=1 mΩ ; B=5 T ; v= 3 cm/s



Soluzione

A) Se la velocità è costante, la risultante delle forze applicate deve essere nulla. Quando si estrae la spira, uscendo in parte dalla zona in cui il campo magnetico è diverso da zero, il flusso di ***B*** concatenato alla spira varierà, inducendo una f.e.m. e quindi una corrente **i** nella spira. Questa corrente, interagendo con il campo magnetico, genera una forza di verso opposto alla velocità che deve essere controbilanciata da una forza uguale e contraria.

Calcolo della corrente indotta:

$$i = \frac{f}{R} \ \ ; \ \ f = -\frac{d\phi(B,x)}{dt} \ \ ; \ \phi(B,x) = [\text{flusso di B quando la spira è uscita di un tratto x dalla zona in cui } B \neq 0]$$

$$= B \cdot L_2 \cdot (L_1 - x)$$

quindi: $f = -\frac{d\left(BL_2(L_1-x)\right)}{dt} = BL_2 v$ quindi $i = \frac{BL_2 v}{R} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}} = 3\ A$

Il verso della corrente indotta sarà tale da opporsi alla variazione di flusso e, dato che il flusso diminuisce, il verso sarà tale da farlo aumentare, quindi antiorario, in modo da generare un campo indotto concorde con B.

B) La spira sarà quindi soggetta, per ogni lato, ad una forza costante: $\bar{F} = i \cdot \bar{L}_{1,2} \times \bar{B}$

Le forze sui due lati paralleli alla velocità (L_1) sono uguali e contrarie, quindi si annullano, rimane la forza che si esercita sul lato L_2 che si trova all'interno della zona in cui c'è il campo B.

$$\bar{F}(L_2) = -iL_2B\hat{x} = -\frac{BL_2v}{R} \cdot L_2B\hat{x} = -\frac{B^2L_2^2\ v}{R}\hat{x}$$

Il lavoro fatto per estrarre tutta la spira, applicando una forza costante $\bar{F} = -\bar{F}(L_2)$ sarà:

$$L = \int_0^{L_1} \bar{F} \cdot d\bar{x} = F \cdot L_1 = \frac{B^2L_2^2 \cdot L_1 \cdot v}{R} = \frac{25 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{0{,}001} = \ 0{,}03 \quad J$$

C) L'energia dissipata sarà:

$E = \int_0^{t^*} W\,dt$ dove $t^* = \frac{L_1}{v}$ è l'istante in cui la spira sarà uscita completamente dalla zona in cui B≠0 e W sarà la potenza dissipata per effetto Joule, quindi:

$$E = \int_0^{t^*} R\,i^2\,dt = \int_0^{t^*} R\left(\frac{BL_2v}{R}\right)^2 dt = R\left(\frac{BL_2v}{R}\right)^2 \cdot \frac{L_1}{v} = \frac{B^2 \cdot L_2^2 \cdot L_1 \cdot v}{R} = 3 \cdot 10^{-2}\,J = L$$

Questa energia ovviamente è la stessa calcolata precedentemente.

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.