CARLO COSMELLI

FISICA PER FILOSOFI

Schede Filosofiche a cura di Paolo Pecere

Addendum al libro

Keplero: la necessità di misure precise per inferire leggi naturali, indipendentemente dalle nostre intuizioni

Le tre leggi di Keplero, in particolare la prima, sono un esempio di come degli ottimi dati sperimentali siano spesso essenziali per dedurre/verificare le leggi naturali.

L'utilizzo dei dati può essere fatto in due maniere diverse. Come ha fatto Keplero con le sue leggi oppure Hooke con la legge sull'elasticità per trovare una forma algebrica ad una legge fenomenologica. Una legge cioè che non ambisce a descrivere un aspetto generale della natura, come i cosiddetti Principi, ma solo a trovare una descrizione matematica per un certo tipo di evento, ristretto a situazioni particolari.

L'altro utilizzo dei dati è quello usualmente fatto quando si vuole confermare la validità di una legge generale o di un principio. Nel caso delle leggi di Keplero, per esempio, si può verificare che le leggi, e quindi i dati sperimentali delle orbite dei pianeti, possono essere dedotti dai principi di Newton e dalla legge di gravitazione universale. Circa 400 anni dopo, nel 1915 si vedrà come in realtà non tutte le orbite dei pianeti possono essere descritte dalle leggi della Fisica classica. In particolare ci sarà una discrepanza per l'orbita di Mercurio. La soluzione a questa discrepanza, piccola ma inequivocabile, verrà data da A. Einstein che con la sua Relatività Generale modificherà le leggi della fisica classica arrivando ad una descrizione "esatta" anche del moto di Mercurio. Anche in questo caso saranno necessarie misure molto precise dell'orbita del pianeta per validare la Relatività Generale, avendo verificato che la legge di Gravitazione universale di Newton non era sufficiente a spiegare l'andamento dell'orbita.

La precisione delle misure è essenziale specie quando la legge fisica (da trovare o da verificare) non è per nulla intuitiva, anzi va contro il buon senso o le nostre supposizioni. Che le orbite dei corpi celesti dovessero essere delle ellissi e non delle circonferenze (perfette!) non era per nulla ovvio, anzi cozzava contro tutte le credenze dell'epoca e anche contro le idee innate. Ma era così, la natura non è né ovvia né intuitiva, è sempre stato pericoloso cercarne le giustificazioni con argomenti a priori.

Le leggi di Keplero

J. Keplero scrive, tra il 1609 e il 1618, tre leggi che descrivono il moto dei pianeti intorno al sistema solare. Le leggi sono inferite utilizzando i dati di misurati con grande precisione dal suo maestro, Tycho Brahe, negli ultimi decenni del 1500. Le tre leggi che descrivono il moto dei pianeti intorno al Sole sono:

1) I pianeti si muovono secondo orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi (1609).

2) Per ogni pianeta il raggio sole-pianeta descrive aree uguali in tempi uguali (1609).

3) Il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo dell’asse maggiore ha lo stesso valore per tutti i pianeti che orbitano intorno al Sole - è una costante (1618).

Nota matematica: L'Ellisse

L'ellisse è la curva del piano descritta da un punto tale che la somma delle distanze del punto da due punti fissi (i fuochi F1, F2) sia costante (vedi Fig. 1).

La dimensione e la forma di un'ellisse sono determinate da due costanti, chiamate convenzionalmente a e b. La costante a è la lunghezza del semiasse maggiore; la costante b è la lunghezza del semiasse minore.

L'equazione dell'ellisse si trova eguagliando la somma delle distanze fra i fuochi e un punto generico P (x,y) al doppio del semiasse maggiore: $PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a$$

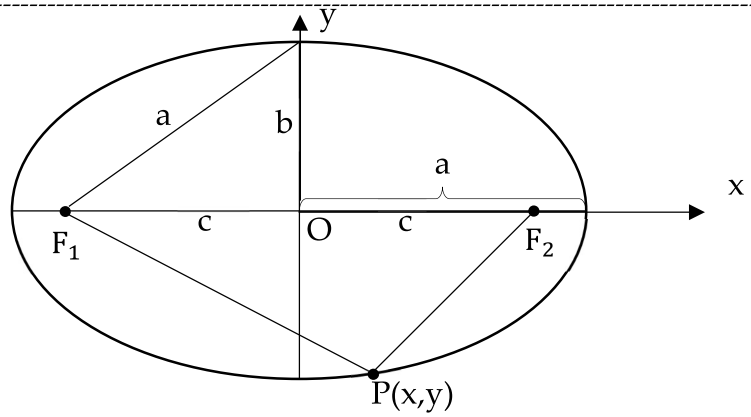


Fig. 1 Un'ellisse con indicati i fuochi F1 e F2, il semiasse maggiore a, il semiasse minore b e la distanza di ogni fuoco dal centro: c. Il punto P(x,y) ha le coordinate determinate da un sistema O [x,y].

Per trovare l'equazione canonica o normale dell'ellisse (cioè con centro nell'origine e i fuochi nell'asse delle x) sostituiamo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_1 = -c$, $x_2 = c$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e con le opportune manipolazioni si ottiene un'ellisse centrata nell'origine di un sistema di assi cartesiani x, y con l'asse maggiore posto lungo l'asse delle ascisse. L'ellisse è definita dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La stessa ellisse è rappresentata anche dall'equazione parametrica:

$$x = a\ \cos t$$
$$y = b\ \sin t$$
$$0 \le t < 2\pi$$

La "forma" di un'ellisse, cioè quanto sia "ellittica" rispetto ad una circonferenza, è espressa da un numero chiamato eccentricità dell'ellisse, convenzionalmente denotata da "e" (da non confondere con la costante matematica e = 2,72…). L'eccentricità è legata ad a e b dall'espressione $e = \frac{c}{a}$ ed è un numero positivo compreso tra 0 e 1. Se la grandezza "e" è uguale a 0, l'ellisse degenera in una circonferenza, se è uguale a 1 degenera in una retta. Maggiore è l'eccentricità, maggiore è il rapporto tra a e b, quindi l'ellisse sarà più allungata. La distanza tra i due fuochi è $2c$. L'eccentricità dell'orbita della Terra oggi è 0.0167. L'eccentricità dell'orbita terrestre varia lentamente nel tempo come risultato dell'interazione gravitazionale tra i pianeti.

PIANETA	*a (UA)*	*Periodo (10^7s)*	*eccentricità*
Mercurio	*0,387*	*0,76*	*0,206*
Venere	*0,723*	*1,94*	*0,00677*
Terra	*1*	*3,16*	*0,0167*
Marte	*1,524*	*5,94*	*0,0934*
Giove	*5,203*	*37,4*	*0,0484*
Saturno	*9,537*	*93,0*	*0,0541*
Urano	*19,19*	*266*	*0,0472*
Nettuno	*30,07*	*5200*	*0,00859*

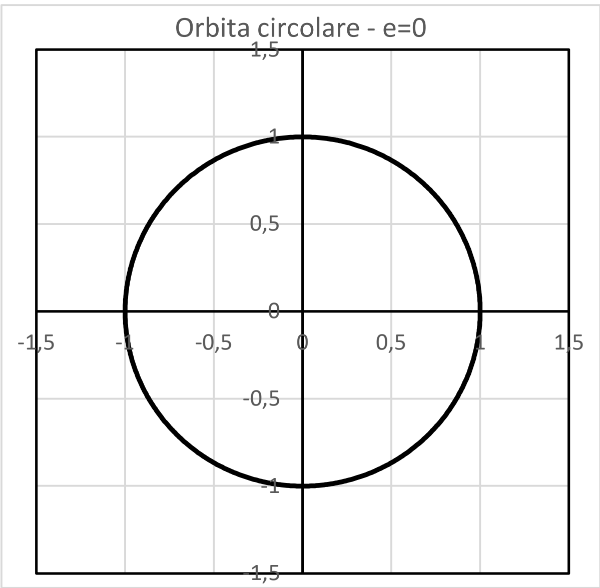
Tab. 1 Alcuni valori orbitali dei pianeti che ruotano intorno al Sole. L'unità astronomica UA è la distanza media Terra-Sole e vale 1 UA = $149{,}6 \cdot 10^6$ km.

Ma le orbite dei pianeti sono veramente delle ellissi?

La risposta è sì, ma il problema è quanto queste orbite siano ellittiche.

Le ellissi, per quasi tutti i pianeti, descrivono orbite molto poco ellittiche: sono molto più vicine ad una circonferenza che ad una ellisse, a parte l'orbita di Mercurio.

In figura 2 sono mostrate due orbite: una circonferenza perfetta (e=0, a sinistra), e un'ellisse con e = 0,05 (a destra) quindi pari all'eccentricità di Giove. Su questa scala non si vede la differenza.



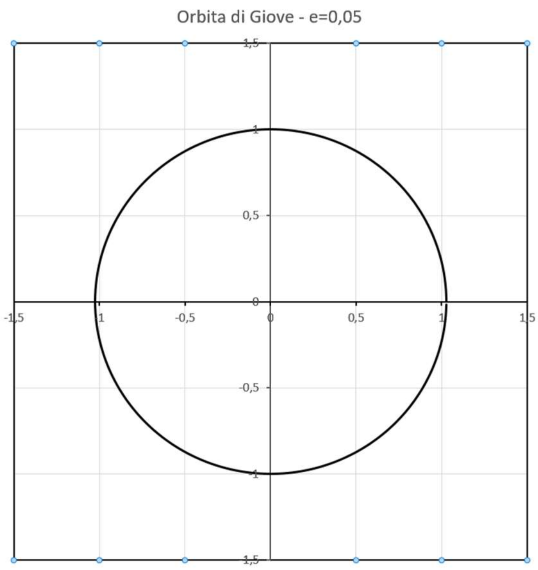


Fig.2 Orbita circolare (e=0) ed orbita ellittica con e = 0,05 (come quella di Giove). L'orbita di Giove è leggermente più grande sull'asse orizzontale. Vedere l'ingrandimento in figura 2.

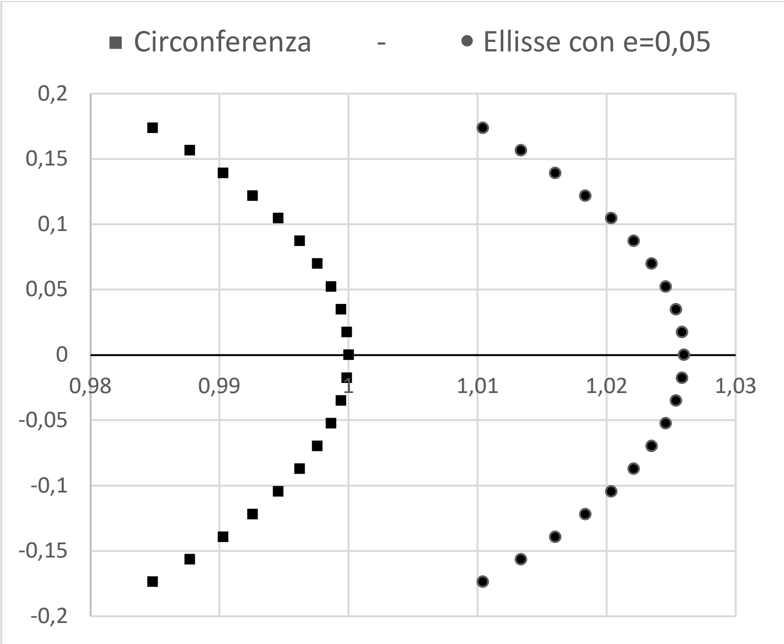


Fig.3 Ingrandimento delle due tracce di figura 1 tracciate vicino all'estremo destro della traiettoria. Si vede che la differenza sul semiasse maggiore – che per la circonferenza vale 1- è molto piccola, è circa 0,025 cioè il 2,5%. Questa è la ragione per cui per distinguere i due casi sono necessarie misure molto precise.

Nella figura 3 è mostrato un ingrandimento della parte laterale destra della figura 2, in cui si può valutare la differenza fra le due curve. La distanza dal centro delle due figure (il raggio, cioè il semiasse maggiore) è 1 (esatto) per la circonferenza, e 1,025 per l'ellisse. La variazione percentuale del raggio è quindi:

$$\frac{R_e - R_c}{R_c} = \frac{1{,}025 - 1}{1} = 0{,}025 = 2{,}5\%$$ si ha cioè una variazione del 2,5 %.

Questo vuol dire che, per apprezzare questa variazione, devo essere in grado di fare delle misure con una precisione almeno 10 volte migliore; quindi, è necessaria una precisione dello 0,25 % cioè di 25 parti su 10'000 per apprezzarne differenza.

Questa, circa, è la precisione necessaria nella misura della posizione del pianeta se si vuole distinguere l'orbita circolare da quella ellittica. E questa era quindi, almeno, la precisione che avevano le misure di Tycho Brahe utilizzate da Keplero.

Carlo Cosmelli
19.8.2021