PARTE IV

TEORIA DELLA RELATIVITÀ SPECIALE

1. Il punto della situazione a inizio novecento

A inizio novecento la situazione in fisica era la seguente: si credeva nell'esistenza di uno spazio assoluto e di un tempo assoluto, indipendenti l'uno dall'altro, ed entrambi isotropi ed omogenei. Si credeva inoltre che lo spazio fosse euclideo. Valevano la relatività galileiana e le trasformazioni galileiane; e valevano i principi della dinamica di Newton.

I sistemi a molte particelle erano descritti dalle leggi della termodinamica. Grazie alla termodinamica inoltre era definita la direzione dei fenomeni naturali: il tempo.
Esistevano due forze: gravitazionale e elettrico/magnetica (Quest'ultima nata dalla unificazione della forza elettrica e di quella magnetica a opera di Maxwell)

Le leggi della fisica erano deterministiche, o probabilistiche per i sistemi complicati. Per definire lo stato di un sistema serviva sapere la sua posizione e la velocità, più la massa e la carica elettrica.

Tuttavia vi erano dei problemi irrisolti; alcune cose non tornavano. Nella prima metà del XX secolo nascono due nuove teorie, per rendere conto questi problemi: le teorie della relatività e la meccanica quantistica.

Le teorie della relatività furono create da Albert Einstein in due anni precisi: nel 1905 venne creata la teoria della relatività speciale (o teoria della relatività ristretta), nel 1916 la teoria della relatività generale.

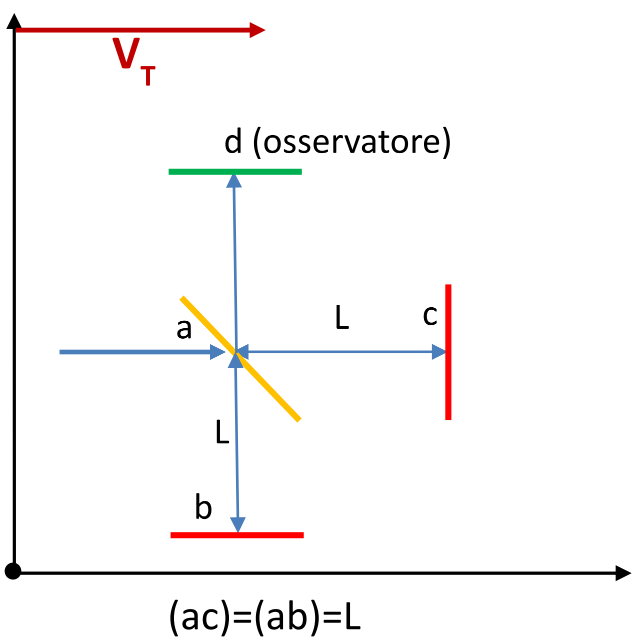
Le cose più importanti che non tornavano, prima che venissero elaborate le teorie della relatività e la meccanica quantistica, erano: il risultato dell'esperimento di Michelson e Morley (1887), delle asimmetrie nell'elettromagnetismo e molte proprietà della materia, in particolare di quella microscopica.

1.1. Il problema della velocità della luce: l'esperimento di Michelson e Morley

La somma classica delle velocità dovrebbe valere anche per la velocità della luce quando viene emessa da un sistema che si muove, per esempio da una persona che sta sulla terra.

Alla fine del XIX secolo si supponeva che la luce venisse trasportata da un etere luminifero, e che questo etere fosse immobile. Di conseguenza si sosteneva che ogni corpo in movimento producesse un "vento d'etere" che si muoveva rispetto al corpo alla stessa sua velocità, ma con direzione opposta.

Nel 1887 Albert Abraham Michelson e Edward Morley realizzano un esperimento per misurare il "vento d'etere" che ci sarebbe dovuto essere sulla terra. Se la luce si propaga attraverso l'etere, dovrebbe essere possibile rilevare la differenza della velocità della luce nella stessa direzione del vento d'etere, rispetto alla direzione opposta.



Utilizzando un interferometro,

La luce fa due percorsi: (acad) ; (abad)

$$t(ac) = \frac{L}{c - V} \quad ; \quad t(ca) = \frac{L}{c + V}$$

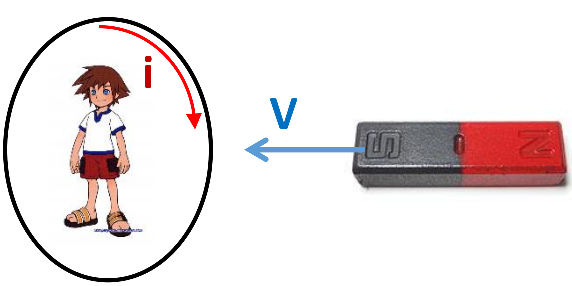
$$t(ab) = t(ba) = \frac{L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Michelson e Morley lanciano la luce una volta nel senso di rivoluzione della terra, una volta in senso contrario, e perpendicolarmente.

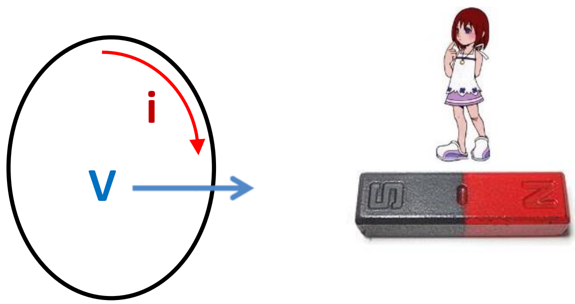
Non vedono alcuna differenza! Le formule della Relatività galileiana non funzionano. La luce non obbedisce alla legge classica di composizione delle velocità.

1.2. Spire, magneti e correnti indotte

Poniamo il caso che un osservatore sia solidale con una spira. Se muovo un magnete rispetto alla spira, nella spira passa una corrente i: $i = \frac{f}{R}$; $f = -\frac{d\phi(B)}{dt}$



Poniamo il caso che un osservatore sia solidale con un magnete. Se muovo una spira rispetto al magnete, nella spira passa una corrente i: $i = \frac{f}{R}$; $f = \oint \bar{E} \cdot \bar{dl} = -\oint \bar{v} \times \bar{B} \cdot \bar{dl}$



Nei due casi devo utilizzare due formule diverse per calcolare la corrente i, in realtà ho sempre e solo un movimento relativo del magnete rispetto alla spira…

Secondo la relatività galileiana se ho dei sistemi che si muovono uno rispetto all'altro con velocità costante, le leggi della fisica devono rimanere le stesse: devo poter utilizzare le stesse formule.

Se devo usare formule diverse per calcolare la corrente nei due casi, allora c'è un'asimmetria che non dovrebbe esserci. Un'altra alternativa è che la relatività di Galileo valga solo per la meccanica.

1.3. Altre cose che non tornavano

- Il colore del cielo: è nero di notte e azzurro di giorno, perché? (Keplero 1601, Olbers 1826).
- Il colore degli oggetti in funzione della temperatura.
- La quantità di radiazione elettromagnetica, di energia radiante, che esce da un corpo nero (~ un forno caldo).
- L'elettrone gira intorno al nucleo senza caderci dentro, perché?.
- Le proprietà assolutamente costanti degli elementi.
- Le differenze di comportamento fra gli elementi: 1 elettrone in meno fa molta più differenza che molti elettroni in meno: $\mathrm{Xe}^{54} \neq \mathrm{I}^{53}$; $\mathrm{Xe}^{54} \cong \mathrm{Kr}^{36}$

2. Punti di partenza della teoria

Einstein propone di ridefinire lo spazio e il tempo partendo da due principi:

1. Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento "inerziali" (cioè per tutti i sistemi che si muovono uno rispetto all'altro con velocità costante). Vale per TUTTE le leggi della fisica, non solo per la meccanica.
2. La velocità della luce nel vuoto è una costante universale, ed è indipendente dal moto del sistema che la emette e da quello che la riceve.
   La velocità della luce non si "somma"; le velocità si sommano secondo regole particolari, diverse dalla semplice somma di Galileo.
   Le regole di Galileo continuano ad essere valide per velocità molto minori di quelle della luce[1].
   La velocità della luce, inoltre, è la velocità massima raggiungibile in natura.

[1] La velocità della luce nel vuoto, misurata ad oggi è: 299.792,458 km/s

3. Le trasformazioni di Lorentz

3.1. Nota formale

Come descrivo un impulso di luce che viene emesso da una sorgente puntiforme in maniera isotropa?

La sorgente sia nell'origine del sistema S(O, x, y, z), il raggio cresce con velocità c, quindi:

$$r^2 = c^2t^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad (1)$$

ma la velocità c deve essere la stessa anche se la misuro da un sistema S′ in moto rispetto ad S, per esempio con velocità:

$$\overline{V} = V\hat{x} \;\rightarrow\; x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \qquad (2)$$

Ora applichiamo alla relazione (2) le trasformazioni di Galileo :

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Viene fuori:

$$x^2 - 2Vxt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

Che non è uguale alla (1): le trasformazioni di Galileo non vanno bene!

Come trovare delle trasformazioni giuste?

- I termini in y' e z' vanno bene
- La trasformazione deve essere «lineare» in *x* e *t* perché voglio che la sfera si espanda a velocità costante… quindi relazioni come $x' = x^{\frac{1}{2}}\, t^{\frac{1}{2}}$ oppure $x' = \operatorname{sen} x$, non sarebbero un moto uniforme
- Devo cambiare anche $t' = t$ per cancellare i termini $-2Vxt + V^2t^2$, devo inserire anche la x nella t'

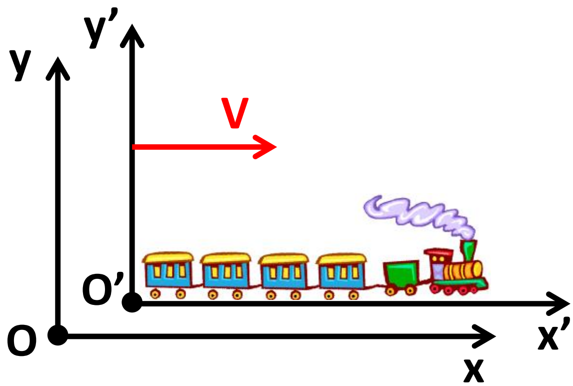
Provo con: $x' = x - Vt$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = t + fx$ (3) dove *f* è ignota, la devo trovare

Calcoliamo la (2), inserendovi le (3): $x^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$ … c'è il fattore fra parentesi, che però è costante e lo stesso per la x e la t, quindi posso eliminarlo scrivendo:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \\ t' = \dfrac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Queste trasformazioni funzionano (sono le trasformazioni di Lorentz) con queste (1) = (2) cioè **c = costante**

3.2. Il risultato matematico: le trasformazioni di Lorentz



$$\begin{cases} x = \gamma\,(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + x'\dfrac{V}{c^2}\right) \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 1 \leq \gamma \leq \infty \end{cases}$$

Nelle traformazioni di Lorentz spazio e tempo non sono più indipendenti: la misura di uno dipende dalla misura dell'altro. Il tempo è determinato dallo spazio e lo spazio dal tempo.

Inoltre $t \neq t'$, si supera il concetto di un tempo assoluto. Lo scorrere del tempo dipende dal sistema di riferimento, dalla sua velocità.

Nelle trasformazioni si trova il fattore **γ** : $1 \leq \gamma \leq \infty$

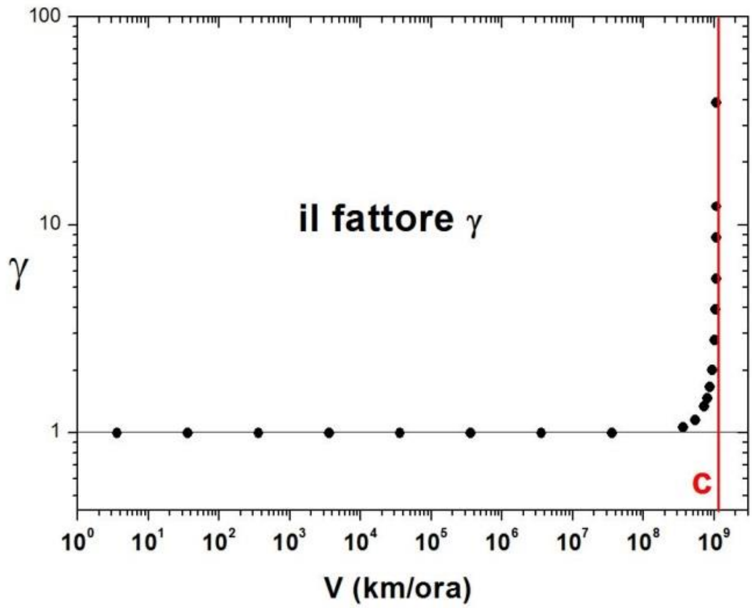
Il fattore **γ** ci dice quanto è grande l'effetto della relatività.

I sistemi "relativistici" hanno **γ** molto maggiore di 1.

Quanto deve essere grande **γ** per ''vedere'' effetti relativistici?

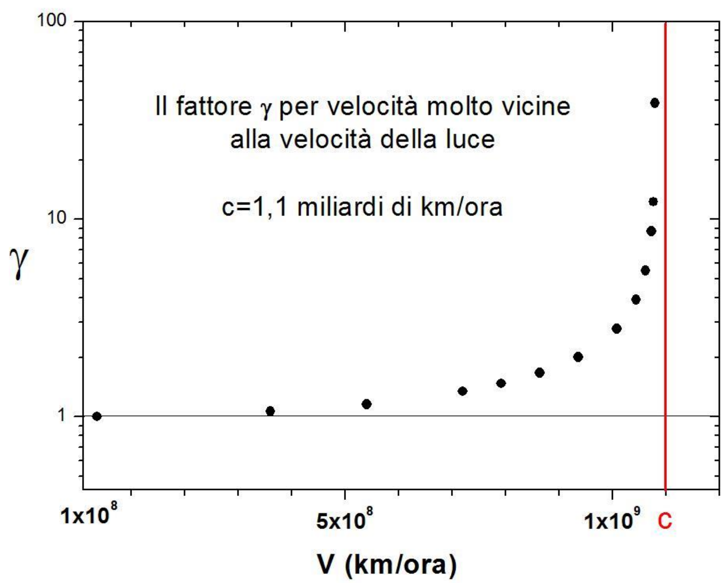
V = 0 → γ = 1

V = c → γ = ∞



Se le velocità sono minori di 100 milioni di km/ora…non ho quasi nessun effetto.

Ecco perché le formule di Newton e di Galileo funzionano lo stesso!



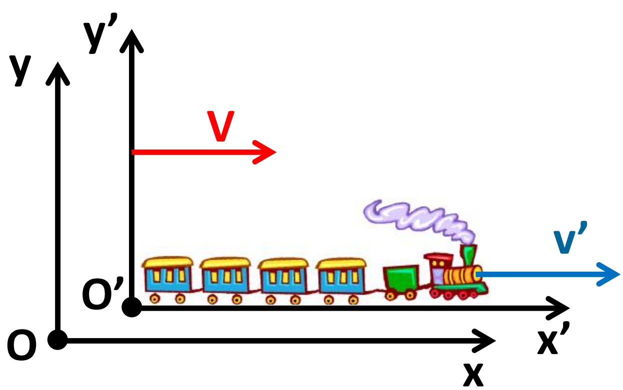
Come si trasformano le velocità? Il treno che va a velocità v′ nel suo sistema di riferimento (O′), a che velocità lo vedrò nel sistema O?

$$\begin{cases} x = \gamma\,(x' + Vt')\,;\;\; dx = \gamma dx' + \gamma V dt' \\ t = \gamma\left(t' + x'\dfrac{V}{c^2}\right)\,;\;\; dt = \gamma dt' + \gamma\dfrac{V}{c^2}dx' \end{cases}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma V dt'}{\gamma dt' + \gamma \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{v' + V}{1 + v'\frac{V}{c^2}}$$

dunque:

$v = \frac{v' + V}{1 + v'\frac{V}{c^2}}$; $v' = c \rightarrow v = c$; $V = c \rightarrow v = c$



Supponiamo che V = 0,9 c $\quad v = \frac{v' + 0{,}9\,c}{1 + 0{,}9\frac{V}{c}}$

v'	v
0	0,9 c
0,5 c	0,96 c
0,8 c	0,988 c
0,9 c	0,994 c
0,95 c	0,997 c
c	c

3.3. Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

Dalle trasformazioni di Lorentz seguono delle conseguenze molto importanti che riguardano lo spazio ed il tempo:

1. Le lunghezze si contraggono nella direzione del moto
2. Gli intervalli temporali si dilatano
3. L'ordine con cui avvengono alcuni eventi non è più determinato, esso dipende da chi li guarda

4. Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Lo SPAZIO e il TEMPO, secondo le traformazioni di Lorentz, rispettivamente si contraggono e si dilatano, a seconda della velocità del sistema di riferimento. Non è l'oggetto in sé che si contrae o la durata che diventa maggiore, l'oggetto non sia accorge di nulla**.** Inoltre un altro osservatore, in un altro sistema di riferimento, misurerebbe altre lunghezze ed altri tempi.

4.1. Contrazione delle lunghezze

Un oggetto A, in moto rispetto a un osservatore B, è più corto di quanto apparirebbe lo stesso oggetto ad un osservatore in quiete rispetto al medesimo. La contrazione delle lunghezze avviene **lungo la direzione del moto,** mentre rimangono invariate in direzione perpendicolare al moto.

Un osservatore solidale all'oggetto A non si accorge di subire una contrazione. Al contrario per tale osservatore è l'osservatore B a subire la stessa contrazione

Chiamamo **L'** la lunghezza di un oggetto misurata in un sistema di riferimento **O'** a riposo rispetto all'oggetto, essa è detta "**lunghezza propia**". La lunghezza dello stesso oggetto misurata da **O** è:

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{L}'}{\gamma} \leq \mathrm{L}' \qquad \text{NB: } \gamma > 1 \text{ quindi } \mathrm{L} < \mathrm{L}'$$

La lunghezza propria di un oggetto è la sua massima lunghezza misurabile. Essa è sempre maggiore di qualunque altra lunghezza che è possibile misurare di tale oggetto (da un sistema di riferimento in moto rispetto ad esso).

4.2. Dilatazione dei tempi

Un orologio standard A, in moto rispetto ad un osservatore B, appare a questo andare più lentamente di un identico orologio standard solidale con lo stesso osservatore.

Per un osservatore solidale all'orologio A è, viceversa, il tempo dell'osservatore B a rallentare.

Chiamiamo **T'** l'intervallo di tempo per misurare un evento segnato da un orologio in un sistema di riferimento **O'** a riposo rispetto all'evento, esso è detto "**tempo proprio**". Lo stesso intervallo misurato con un orologio solidale con **O** è:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}'\gamma \geq \mathrm{T}' \qquad\qquad \text{NB: } \gamma > 1 \text{ quindi } \mathrm{T} > \mathrm{T}'$$

Il tempo proprio è la minima durata misurabile per un evento. Essa è sempre minore di qualunque altra durata che è possibile misurare per tale evento (da un sistema di riferimento in moto rispetto ad esso).

4.3. Il mistero dei muoni

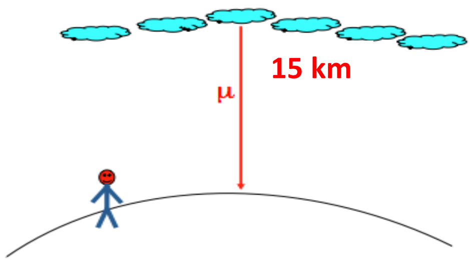
I muoni sono particelle con carica -1, come gli elettroni, solo 200 volte più pesanti. I muoni sono prodotti nell'alta atmosfera a circa 15 Km dal suolo con una v molto vicina a quella della luce. Vivono pochissimo e decadono dopo t_m =2,2 μs

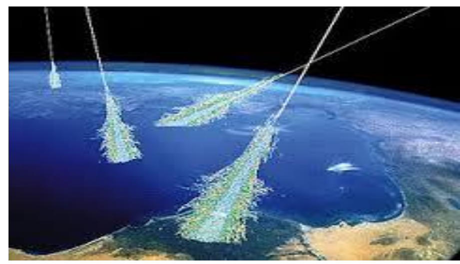
La metà di essi raggiunge la superficie terrestre e attraversa il nostro corpo (circa 1000 al minuto)

Che distanza percorrono prima di decadere?

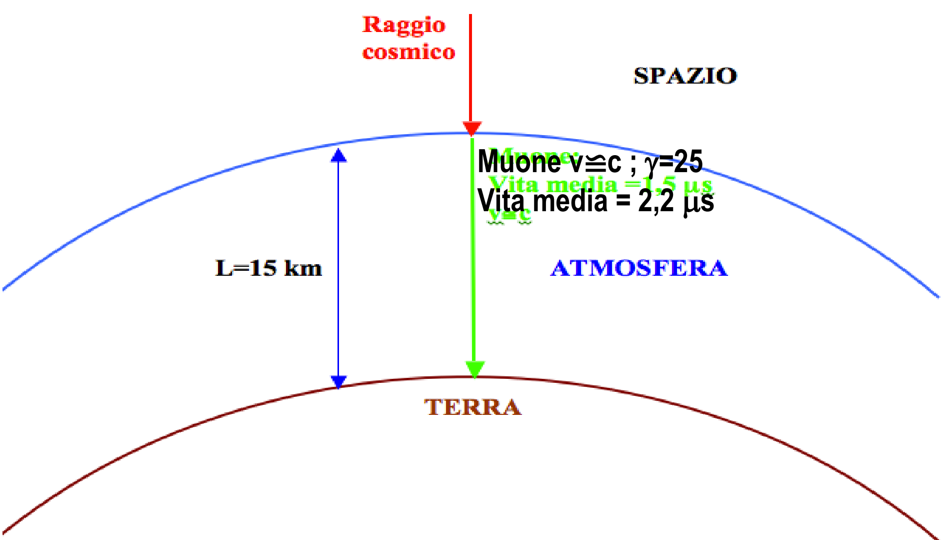
$$d = c \cdot \tau_0 \cong 660 \text{ m}$$

Come possono i muoni raggiungerci se decadono dopo soli 660 m?





La loro vita media, misurata da un osservatore a terra appare **dilatata di un fattore Gamma** che nel caso di muoni atmosferici, con v prossima a c, vale circa **25.**



Quindi i muoni, per noi che siamo sulla terra, vivono 25 volte di più,

$t = 25\ t_m = 55$ ms.

Facendo i calcoli si trova che in media percorrono una distanza di circa 16 Km. Possono dunque raggiungere la terra!

Equivalentemente la distanza che devono percorrere, misurata dai muoni stessi, appare contratta del fattore gamma.

Essi pertanto, dal loro punto di vista, vedono l'atmosfera spessa solo:

15 Km / 25 ~ 600 m, quindi riescono ad attraversarla.

Dalla Terra si vede un muone con la vita più lunga, dal muone si vede l'atmosfera più corta.

Il muone, che classicamente non potrebbe attraversare l'atmosfera, in realtà raggiunge la Terra, e può essere rivelato.

5. Lo spazio-tempo

5.1. Grafici spazio-temporali

<u>Definizione dei simboli utilizzati</u>

- S(x,ct): Sistema di riferimento inerziale con origine in O, e assi (x, ct); c = velocità della luce nel vuoto.

- L0, L1… linee di universo degli osservatori L0, L1…

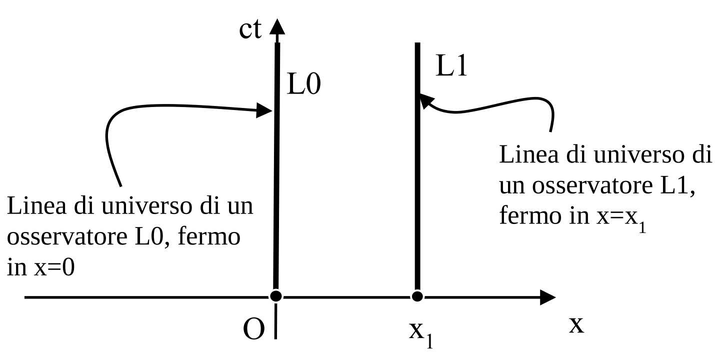
- A, B, C, P…eventi nello spazio tempo; A(x) evento A nella posizione spaziale x; B(t) evento B nella posizione temporale t; C(x,t) evento C nella posizione spazio-temporale x,t.

- ● = posizione di un certo evento.

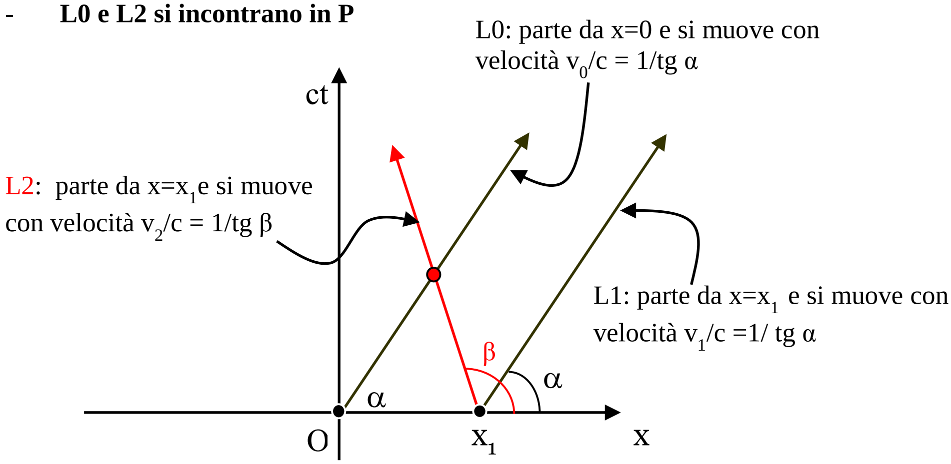
<u>Lo spazio-tempo in due dimensioni.</u>

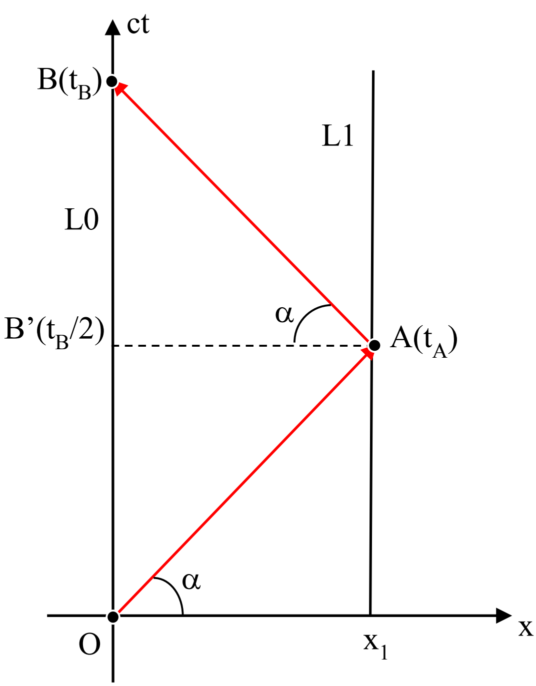
Il piano dello spazio-tempo x, ct del sistema "a riposo" S(x, ct). Il punto O(0,0) è l'origine e rappresenta, nel sistema S: qui e ora.

Io, che sto fermo in S, ho ***x=0*** costante e mi muovo lungo ***ct***



- **L0 e L1 non si incontrano mai**
- **L0 e L2 si incontrano in P**





Da **O** parte un raggio di luce verso **A**. Nel grafico l'angolo α è tale che tg α = ct/x , ma x/t = c, quindi tg α = 1, e α = $45^{0.}$

IMPORTANTE: nel piano (ct ; x) la luce fa **sempre** un angolo di 45^0 con gli assi, se sono ortogonali. Se gli assi non sono ortogonali (vedi dopo) l'angolo è la bisettrice dei due assi.

Il raggio di luce arriva all'osservatore **L1** in **A** che legge sul suo orologio il tempo t_A , poi viene riflesso e va verso l'osservatore **L0**, (sempre facendo un angolo di 45^0 con gli assi), dove arriva in **B** al tempo t_B.

La **definizione** di simultaneità dice che gli orologi in O e in B sono sincronizzati se:

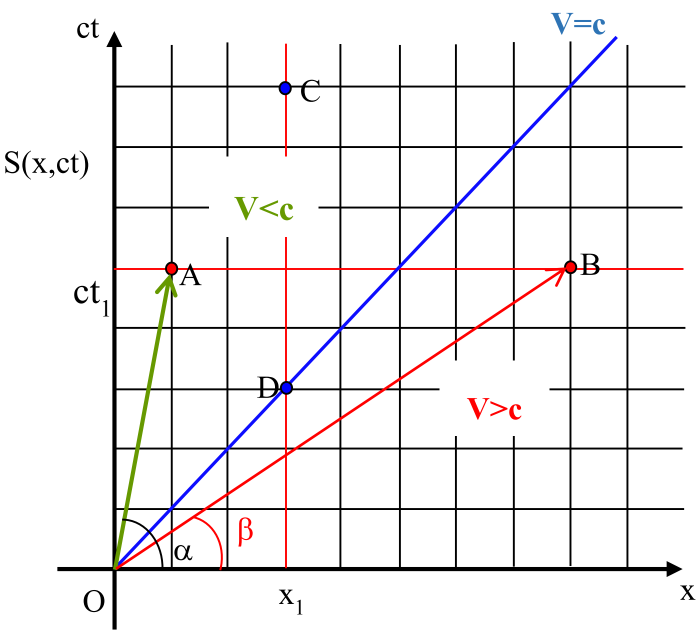
t(O,B')=t(B,B') quindi t(B')=$t_b/2$ e t(B')=t(A) , e gli eventi in B' e in A sono simultanei nel sistema S(x,ct).

La griglia (ideale) dello spazio-tempo per il sistema di riferimento S (a riposo)

Ogni linea orizzontale della griglia unisce eventi simultanei, ex. **A** e **B** avvengono nello stesso istante $\mathbf{t_1}$.

Ogni linea verticale della griglia unisce eventi che avvengono nello stesso luogo; ex. **C** e **D** avvengono nello stesso luogo $\mathbf{x_1}$.

L'evento D **può** essere raggiunto da un fascio di luce partito da O.

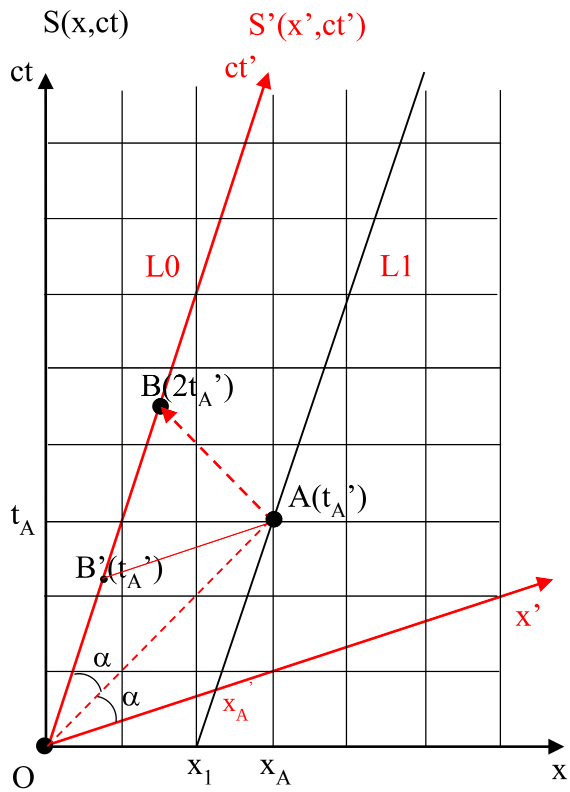


Linee di universo possibili:

- **OA può** essere una linea di universo, perché $ct_1 = x_A$ tg a, quindi $x_A/ct_1 = v_A/c = 1/\text{tg a} < 1$, cioè $v<c$
- OB **non può** essere una linea di universo, perché $ct_1 = x_B$ tg b, quindi $x_B/ct_1 = v_B/c = 1/\text{tg a} > 1$, cioè $v>c$, e nessun segnale può andare da O a B
- OD **può** essere una linea di universo, ma solo per segnali luminosi (fotoni) perché $ct_D = x_1$ tg 45^0, quindi $x_1/ct_D = v_D/c = 1/\text{tg } 45^0 = 1$, cioè $v=c$.

<u>Come si costruisce la griglia per un sistema di riferimento S' in moto rispetto ad S</u>

Il sistema S(x,ct) è il sistema a riposo. L0 ed L1 sono le linee di universo di due osservatori che sono partiti da 0 (L0) e da x_1 (L1) con la stessa velocità v<c. Il sistema che vogliamo caratterizzare è quello in cui L0 è a riposo, e lo chiamiamo S'.

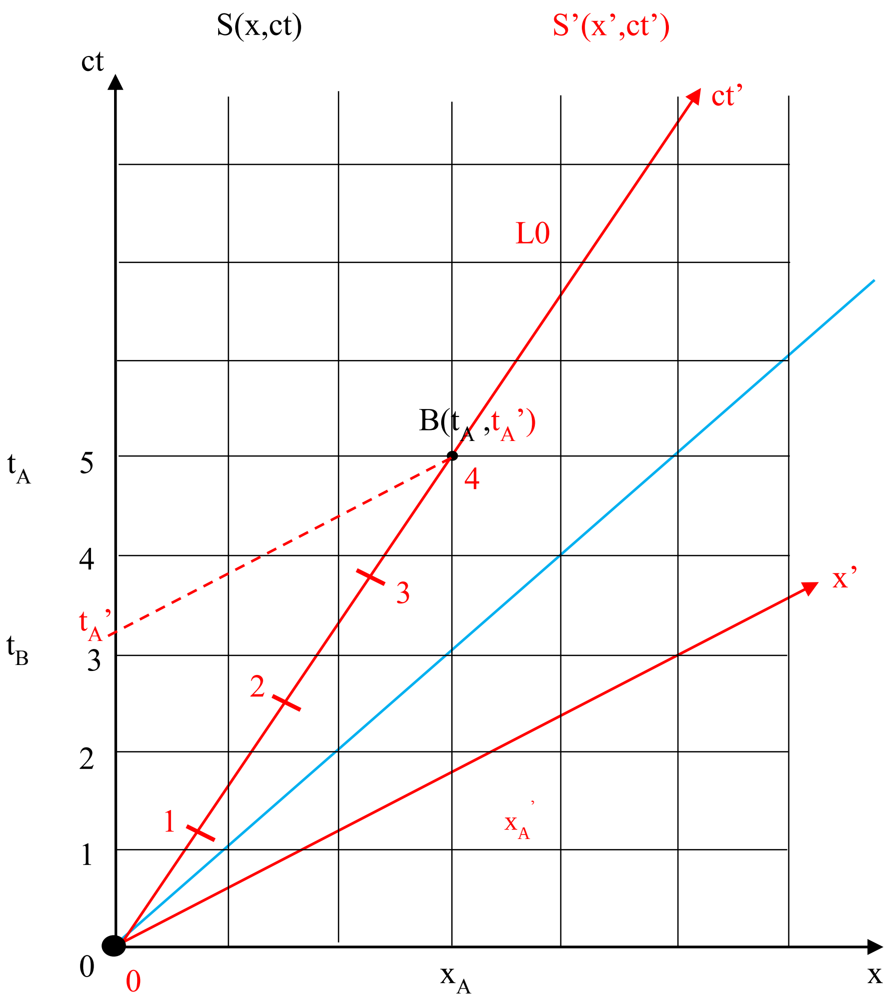


- L'asse L0 sarà l'asse dei tempi ct'.
- Da O inviamo un raggio di luce che incontra L1 nel punto A, all'istante t_1'. La luce viaggia sempre a 45^0.
- A riflette il raggio, che ritorna all'osservatore L0 in B all'istante 2t'. La luce viaggia sempre a 45^0.
- Per definizione di sincronismo, il punto B', a metà strada fra O e B, ha lo stesso tempo t' di A.
- L'asse x' si può costruire in due modi:

  1) l'asse x' è il simmetrico dell'asse ct' rispetto al raggio di luce, i due angoli α sono uguali, è questo che garantisce che la velocità della luce sia sempre c.

  2) Si traccia la retta che parte da O (origine di S' al tempo t'=0), parallela la tratto B'A. Questo tratto infatti congiunge per definizione tempi simultanei nel sistema t'.
- La griglia completa si ottiene tracciando le rette parallele ai due assi di S' (x', ct'). Vedi dopo.
- Si noti che l'evento A ha coordinate diverse nei due sistemi di riferimento, in $S(x_A,t_A)$ e in S' $(x_A{}',t_A{}')$.

Come si costruisce la scala (temporale)



L0 è un sistema che si muove, rispetto al sistema S, con velocità V= 3/5 c , infatti per t_A= 5 L0 ha percorso uno spazio x = 3 quadretti, mentre c ha percorso uno spazio x= 5 quadretti .

Quindi il γ relativo ai sistemi [S, S'] vale $\gamma = 1/[1-9/25]^{1/2} = 5/4$

Nel sistema S misuro t= γ t' , quindi per esempio: $t_A = \gamma\, t_A'$, cioè $t_A' = t_A / \gamma$ da cui $t_A' = 5 /(5/4) = 4$

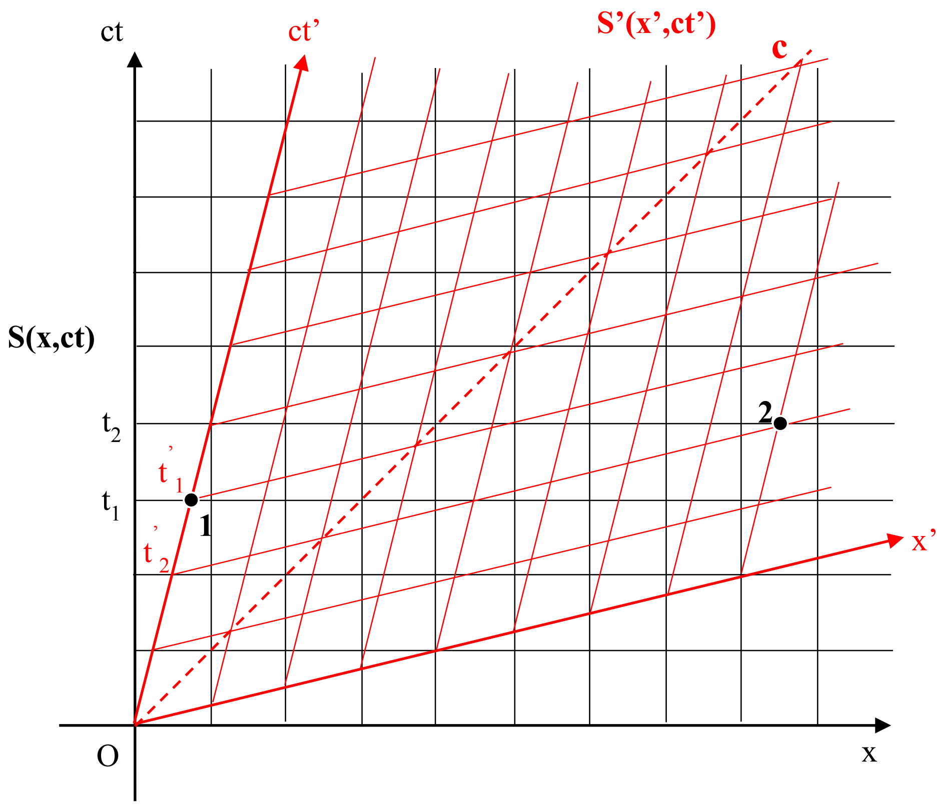
Questo vuol dire che l'orologio in S', nel punto B segnerà un tempo $t_A' = 4 < t_A = 5$; come ci aspettavamo va più lento, quindi le unità di tempo sull'asse ct' sono più lunghe di 5/4 rispetto a quelle di ct.

Nota: Nel sistema S' misuro $t' = \gamma\, t$, quindi per esempio: $t_A' = \gamma\, t_B$, cioè $t_B = t_A' / \gamma = 3{,}3$, cioè anche S' vede il tempo in S contratto di γ.

<u>Problemi di causalità: l'ordine temporale di due eventi, in generale, non è definito.</u>

Esempio: i due eventi **1 e 2** hanno un ordine temporale che dipende dal sistema in cui vengono misurati.

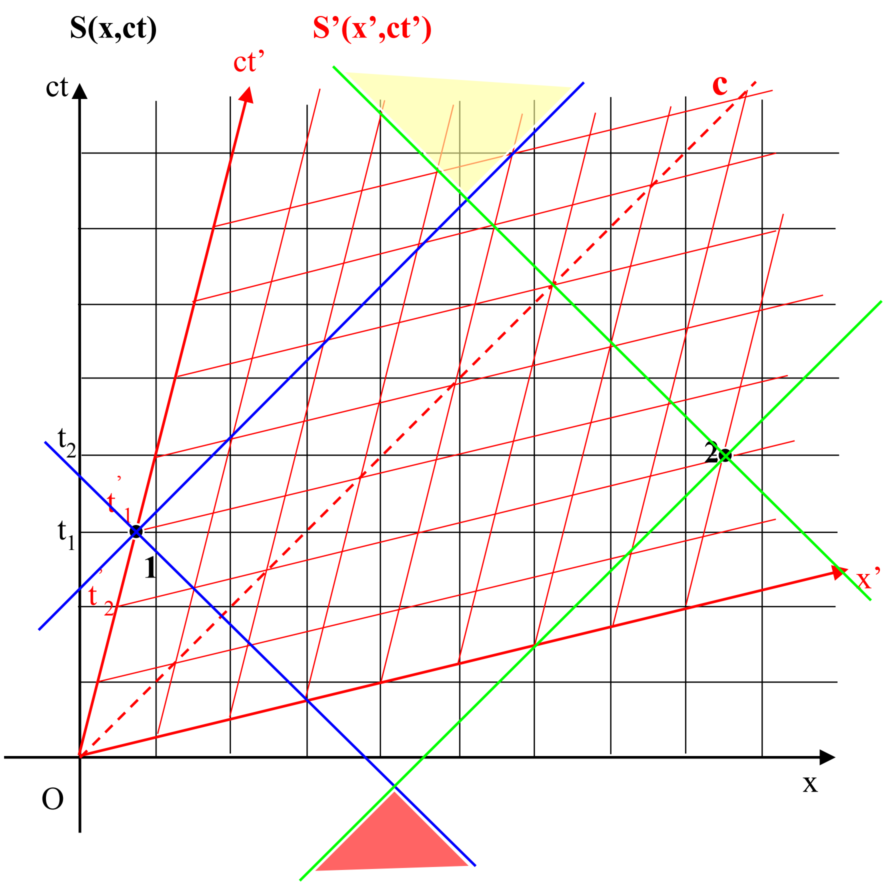
- Nel sistema S(x,ct) $t_1 < t_2$ quindi l'evento 1 precede l'evento 2
- Nel sistema S'(x',ct') $t_2' < t_1'$ quindi l'evento 2 precede l'evento 1



Problemi di causalità: soluzione

Dopo aver disegnato i due coni di luce per l'evento **1** (linee blu) e per l'evento **2** (linee verdi), si vede che **1 e 2** sono "altrove" uno rispetto all'altro, per cui non ci possono essere relazioni di causalità fra di loro, e l'ordine relativo dei tempi di accadimento dipende dai sistemi di riferimento da cui vengono guardati.

Nella storia passata o futura **1 e 2**: possono aver interagito nel passato nella zona ROSSA o potranno interagire nel futuro nella zona GIALLA.

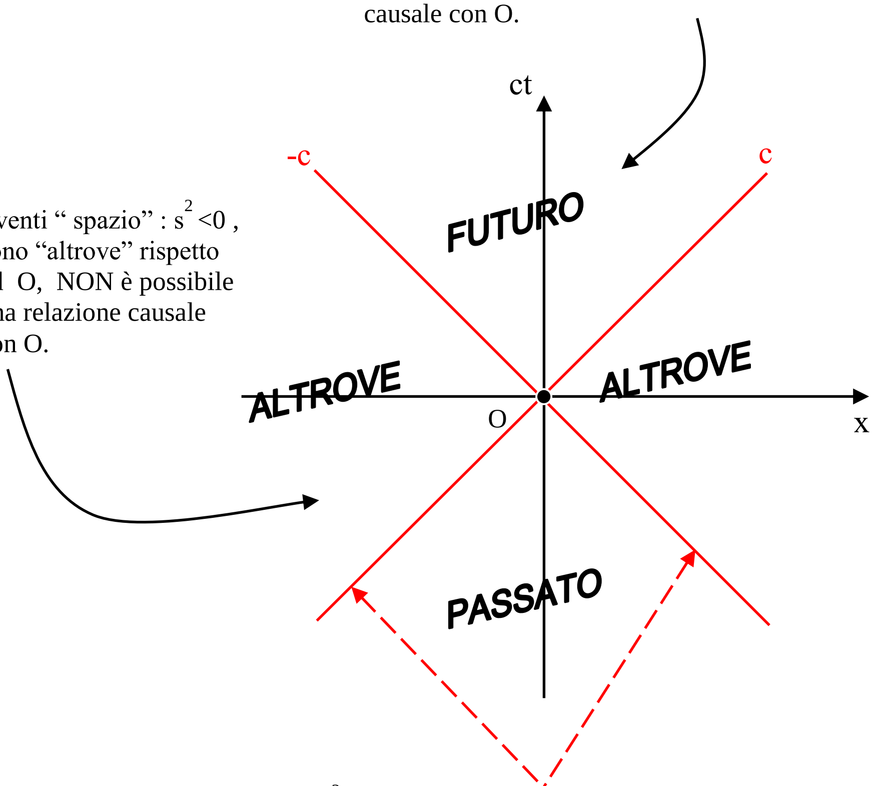


La struttura dello spazio tempo in 2 dimensioni x, ct

La "distanza" fra due eventi, uno dei quali avviene nell'origine O (qui e ora), mentre l'altro ha coordinate x, ct, è: $s^2 = c^2t^2 - x^2$.
In 3 dimensioni (x,y,ct) le rette ± c diventano un cono che separa la zona superiore (il futuro di O), la zona inferiore (il passato di O) e la zona laterale (l'altrove di O). Analogamente in 4 dimensioni (x,y,z,ct).

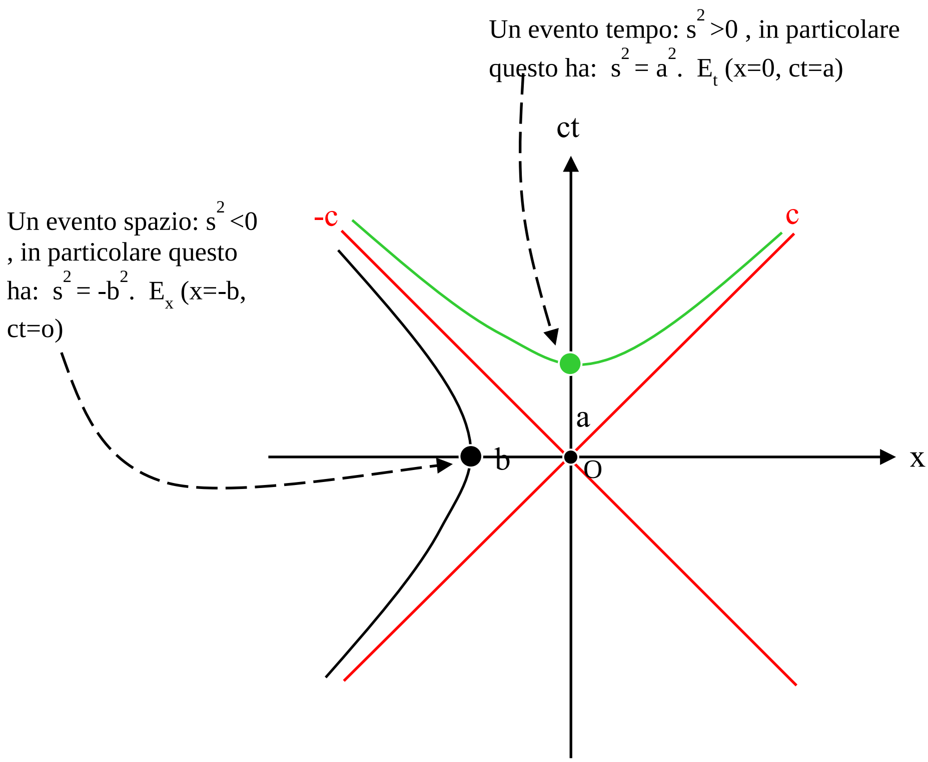
Eventi " tempo": $s^2 > 0$, sono nel passato o nel futuro di O, è possibile una relazione causale con O.

Eventi " spazio" : $s^2 < 0$, sono "altrove" rispetto ad O, NON è possibile una relazione causale con O.



Eventi " luce" : $s^2 = 0$, sono eventi raggiungibili da O solo tramite segnali luminosi a velocità c.

La distanza spazio temporale $s^2 = c^2 t^2 - x^2$ è rappresentata, nelle quattro zone del grafico (futuro, passato || altrove) da iperboli. Tutti gli eventi di ogni singola iperbole hanno la stessa distanza da O. Ma non sono gli stessi eventi!



Nota: Gli eventi che si trovano nel mio «altrove» non possono avere una relazione di causa-effetto con me ora, questo perché una relazione richiederebbe una velocità maggiore di quella della luce, che è la massima raggiungibile in natura. Essi possono essere visti nel mio passato o nel mio futuro a seconda di chi osserva.

5.1. L'ordine degli eventi non è più determinato

Nello spazio-tempo einsteiniano l'ordine degli eventi non è più determinato in maniera assoluta (come era in meccanica classica) ma dipende dal sistema di riferimento.

Le interazioni tra i corpi, secondo la relatività, avvengono alla velocità della luce, e non istantaneamente, come previsto dalla meccanica classica. Perciò un evento ha bisogno di un certo tempo per entrare in relazione con un altro. L'ordine temporale degli eventi, osservati in un determinato sistema di riferimento, dipende perciò anche dalla loro distanza.

Einstein ridefinisce quindi il concetto di simultaneità degli eventi. Due eventi possono risultare simultanei per un osservatore in un determinato sistema di riferimento e non simultanei per un altro che si trovi in un sistema di riferimento differente rispetto al primo.

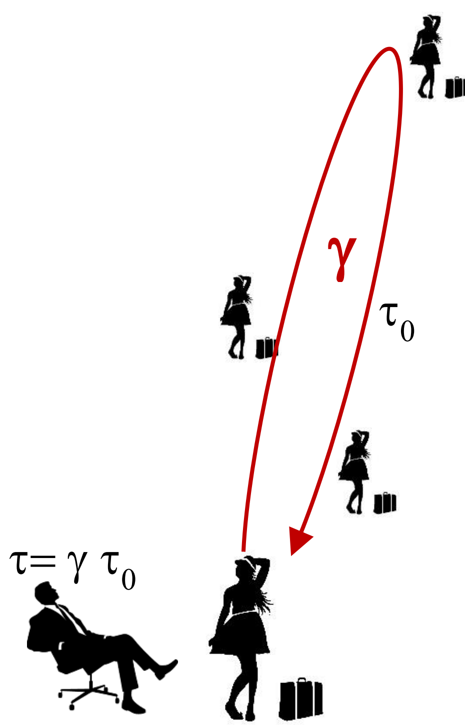
6. Il paradosso dei gemelli

Il paradosso dei gemelli è un esperimento mentale che sembra rivelare una contraddizione nella teoria della relatività speciale. Tale contraddizione, in ultima analisi, risulta come apparente.

L'uomo e la donna sono due gemelli che hanno la stessa età. L'uomo sta sulla Terra. La donna parte per un viaggio con velocità g = 10, e torna dopo t_0=1 anno, sul suo orologio. Per l'uomo il tempo passato è t= gt_0= 10 anni.

Quindi l'uomo è 10 anni più vecchio, mentre le donna solo 1 anno più vecchia.

Ma, nel sistema di riferimento della donna, è l'uomo che ha fatto il viaggio con velocità g, quindi la donna vede il tempo dell'uomo dilatato di gt, ed è lei ad essere più



vecchia di lui. Quindi chi sarà più vecchio alla fine del viaggio?

In realtà i due sistemi **non sono equivalenti.** L'uomo sta fermo, è quindi un sistema inerziale, mentre la donna in almeno tre punti [partenza, inversione della velocità, arrivo] DEVE accelerare, quindi il suo non è un sistema inerziale e non posso scrivere banalmente le relazioni relativistiche.

Quello che succede in realtà è che alla fine è l'uomo ad essere più vecchio.

7. $\mathrm{E} = \mathrm{mc}^2$

7.1. C’è veramente la velocità massima?

Non posso avere una velocità v>c «sommando» le velocità (dalle trasformazioni di Lorentz per la somma di velocità)

Ma forse posso accelerare una particella a velocità maggiori di c…

Esperimento:

1. Faccio passare degli elettroni attraverso una differenza di potenziale $\Delta\mathrm{V}$, quindi gli elettroni acquisteranno un’energia cinetica $\mathrm{E}_c = \mathrm{q}\ \mathrm{DV}$.
2. Poi misuro la loro velocità v.
3. Quindi li faccio assorbire da una massa, e dall’aumento di Temperatura della massa ricavo l’energia ceduta: $\mathrm{E_c} = \mathrm{C}\Delta\mathrm{T}$

Risultati sperimentali: il grafico è della velocità^2 vs. l’E misurata.

- L’Energia aumenta…
- La velocità non supera c

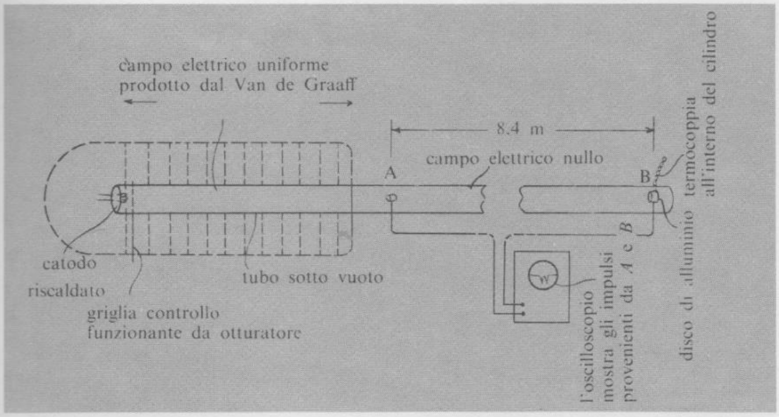


FIGURA 10.43 *Schema generale dell'esperimento sulla velocità limite. Gli elettroni sono accelerati nel campo uniforme di sinistra e il tempo di transito fra A e B è misurato con un oscilloscopio.*

m_e non può avere una velocità > c

Andamento classico: $T = E = \frac{1}{2}\, m\, v^2$

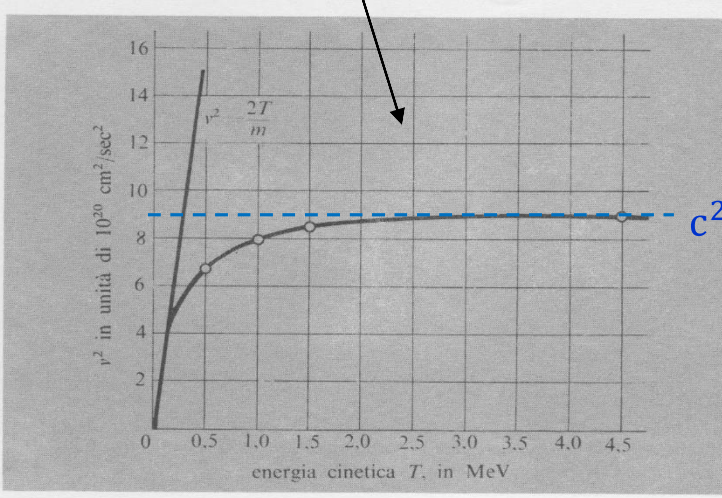


FIGURA 10.44

Andamento classico: $p = mv$

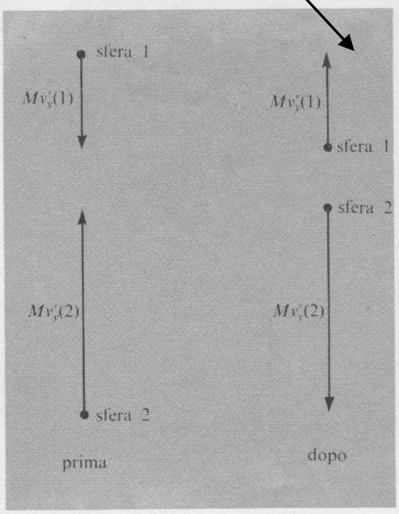


FIGURA 12.5 *Nel nuovo riferimento S' la quantità di moto non relativistica nella direzione y' non è la stessa prima e dopo l'urto: vi è un netto aumento della componente y della quantità di moto non relativistica.*

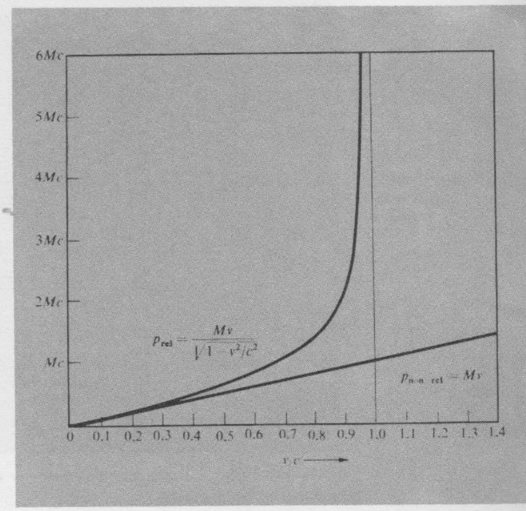


FIGURA 12.6 *Affinché la conservazione della quantità di moto sia valida in* tutti *i sistemi di riferimento, ridefiniamo* **p** *come segue: per una particella avente velocità* **v** *e massa a riposo M deve essere:*

$$\mathbf{p} = \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

I valori della quantità di moto relativistica e di quella non relativistica sono riportati in grafico.

Il problema della conservazione della quantità di moto in un urto fra due particelle…

La quantità di moto si conserva solo se la ridefinisco così:

$$\bar{p} = \frac{M\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma M \bar{v}$$

…devo ridefinire M?

7.2. La soluzione di Einstein

Fino ad ora si è parlato di Spazio e di Tempo, ma cosa succede alle «masse»? Cosa succede a «quanto pesa» un corpo?

Nel settembre del 1905 Einstein pubblica un secondo articolo: *«L'inerzia di un corpo dipende dalla sua energia?»*

Einstein scrive: *Se un corpo perde l'energia E sotto forma di radiazioni, la sua massa diminuisce di E/c². Il fatto che l'energia sottratta al corpo diventi energia di radiazione non fa alcuna differenza, perciò siamo portati alla più generale conclusione che la massa di qualunque corpo è la misura del suo contenuto di energia.*

Quindi: $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ ovvero: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ …. $E = mc^2$

Cosa vuol dire, e come si inserisce questa relazione nell'ambito della Relatività?

Abbiamo visto che le lunghezze e gli intervalli di tempo dipendono dal sistema di riferimento, cioè dalla velocità di chi li osserva rispetto agli oggetti stessi.

E la massa? Cosa vuol dire che l'energia dipende dalla massa?

Nota: L'energia non è un invariante…neanche per Galileo…$E_c = \frac{1}{2} mv^2$

Stiamo parlando della massa ''inerziale'', quella che entra nel secondo principio della dinamica [F=ma], la quantità legata alla quantità di «materia» di un corpo.

Per essere coerente con il resto della teoria l'Energia va scritta così: $E \equiv m_0 c^2 \gamma$ e, dato che c è costante, sarà la massa ad essere relativa al sistema rispetto a cui la misuro, il suo valore dipende quindi dal fattore γ come il tempo:

$$m(v) = \gamma \cdot m_0 \geq m_0$$

m_0 è la cosiddetta ''massa a riposo'', quella misurata in un sistema in cui il corpo di massa **m** è in quiete.

Cosa vuol dire che $m(v) = \gamma \cdot m_0 \geq m_0$?

Ricordiamo che il fattore gamma γ ci dice quanto stiamo andando veloci rispetto al sistema che stiamo osservando:

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, e che il fattore $\boldsymbol{\gamma}$ è praticamente uguale a 1 per tutte le velocità ''piccole'' rispetto alla velocità della luce, mentre diventa sensibile solo quando ci si avvicina ad essa.

Quindi nel mondo in cui viviamo, per corpi «macroscopici», γ è sempre 1, e le masse cambiano di quantità molto molto piccole.

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots}$$

L'energia di un corpo in movimento:

Riscriviamo la formula di Einstein $E = m\,c^2 = m_0\,c^2\gamma$

Possiamo fare un calcolo **per velocità «piccole»,** cioè per v<<c:

$E = m_0\,c^2\gamma \cong m_0\,c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots\right)$ dove i puntini (…) indicano altri termini molto piccoli rispetto ai precedenti.

Si ha: $E \cong m_0\,c^2 + m_0\,c^2\,\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = m_0\,c^2 + \frac{1}{2}m_0\,v^2 = E_0 + E_c$

L'energia di un corpo è composta di più termini, uno costante (è l'energia a riposo) ed uno che non è altro che la «vecchia» energia cinetica della meccanica classica.

Riassumendo: (per velocità «piccole» v<<c)

$$E \cong m_0\, c^2 + \frac{1}{2} m_0\, v^2 = E_0 + E_c$$

Un corpo ha sempre un'energia $E_0 = m_0\, c^2$, anche se sta fermo,...se lo rompo…se riesco a convertire in energia una parte della sua massa ottengo un'energia molto grande:

Per esempio se avessi 1 kg di ^{238}U… e lo convertissi in Energia termica con l'efficienza dello 0,1%, potrei ottenere un'energia elettrica (3:1) :

m (1kg U^{238}) → E=3 10^{13} J = 1 GW/anno= 27 MW/giorno

27'000 famiglie che consumano 1kW al giorno, per un anno di seguito…

Dall'aumento della massa con la velocità deriva in modo naturale che un corpo con una massa diversa da zero non può mai arrivare alla velocità della luce.

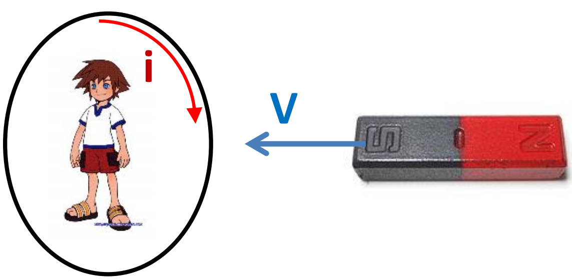
Se ho un corpo e voglio «accelerarlo», cioè aumentare la sua velocità, devo fornirgli un'energia proporzionale alla sua massa e al quadrato della sua velocità: $E = \frac{1}{2} m v^2$; ma quando il corpo accelera, la sua velocità aumenta…la sua massa anche, e l'energia necessaria diventa

$E = \frac{1}{2} m_0\, \gamma\, v^2$ … c'è il famoso fattore gamma che diventa sempre più grande… alla velocità della luce sarebbe infinito, e sarebbe quindi infinita l'energia necessaria per accelerare il corpo…non ce la farò mai, né io, né nessun altro sistema fisico.

8. Conclusioni

8.1. Che fine hanno fatto le asimmetrie magneti/spire?

1. L'osservatore è solidale con la spira:



1) Muovo il magnete rispetto alla spira: nella spira passa una corrente **i**

$$i = \frac{f}{R};\ \ f = -\frac{d\phi(B)}{dt}$$

Il problema era che l'osservatore vedeva un campo magnetico in movimento: ma anche i campi E, B, D, H….hanno le loro trasformazioni quando vengono visti da un sistema in moto rispetto a loro:

$E_{y,z} = \gamma\left[E'_{y,z} \pm V_x B'_{z,y}\right]$ quindi il campo B viene visto come un campo elettrico (a riposo)

$B_{y,z} = \gamma \left[B'_{y,z} \mp \frac{v_x}{c^2} E'_{z,y} \right]$ …+ un campo magnetico (a riposo). E tutto torna.

8.2. Grandezze invarianti in tutti i sistemi inerziali

Sembra che tutto sia relativo…è vero, ma ci sono molte grandezze invarianti in tutti i sistemi inerziali.

- La velocità della luce nel vuoto è una costante universale: **c=299 792 458 m/s** (esatta).
- L'intervallo spazio-temporale: $ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ (sostituisce l'invarianza di dx e dt).
- La lunghezza $\mathbf{L_0}$ di un oggetto: la lunghezza di un oggetto misurato in un sistema in cui l'oggetto è a riposo è $\mathbf{L_0}$ **ed è la massima** lunghezza fra tutte quello che qualunque osservatore può misurare.
- La durata $\mathbf{t_0}$ di un evento: la durata di un evento misurata in un sistema in cui l'evento è a riposo è $\mathbf{t_0}$ **ed è la minima** durata fra tutte quello che qualunque osservatore può misurare.
- La massa $\mathbf{m_0}$ di un corpo: la massa di un corpo misurata in un sistema in cui il corpo è a riposo è $\mathbf{m_0}$ **ed è la più piccola** massa fra tutte quello che qualunque osservatore può misurare.
- La combinazione Energia-impulso: $\mathbf{E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4}$
- La carica elettrica.