

PARTE V

TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE

1. Introduzione

La Relatività Generale è, matematicamente, una teoria estremamente complessa.

Einstein disse che era il problema più complicato che avesse mai affrontato. Impiegò circa 10 anni a sviluppare tutta la Teoria.

Nelle pagine che seguono cercherò di darne una visione molto semplificata, fermandomi in particolare sugli effetti, agli inizi del '900 non spiegati, che invece la teoria spiega perfettamente, e sugli aspetti che ci coinvolgono tutti i giorni.

1.1. La gravità e altri problemi

La Relatività Speciale prevede che non possano esistere segnali che viaggiano a velocità maggiore di quella della luce.

Ma esiste la forza di Gravità, quella della legge di Gravitazione Universale di Newton:

$$F = \frac{m_g M}{r^2}$$

Se supponiamo, per esempio, che il Sole si sposti di un po'...la Terra sentirà una forza diversa...ma quando? Istantaneamente? Secondo Newton sì. Questo, secondo la teoria della relatività speciale, non è possibile!

Anche altri fenomeni non trovano spiegazione: la precessione dell'orbita di Mercurio: le misure erano chiare¹, ma nessuna teoria poteva spiegare il fenomeno...

¹ Le misure delle orbite erano molto precise, fin dall'antichità

2. Equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale

La legge che descrive la dinamica dei corpi in movimento è la seconda legge della dinamica:

$$F = m_i a$$

Dove m_i è la cosiddetta massa inerziale.

La legge che descrive la forza gravitazionale è la legge di Gravitazione universale di Newton:

$$F = \frac{m_g M}{r^2}$$

Dove m_g è la cosiddetta massa gravitazionale.

Galileo afferma che queste due masse sono uguali, e lo prova con alcuni esperimenti (poco precisi).

Altri scienziati hanno ripetuto la misura. Ad oggi m_i e m_g sono

risultate uguali entro una parte su 10^{12} ...

Einstein fa qualcosa di più e di diverso: crea una nuova teoria della gravitazione in cui il punto di partenza è principio dell'equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale. Perché?

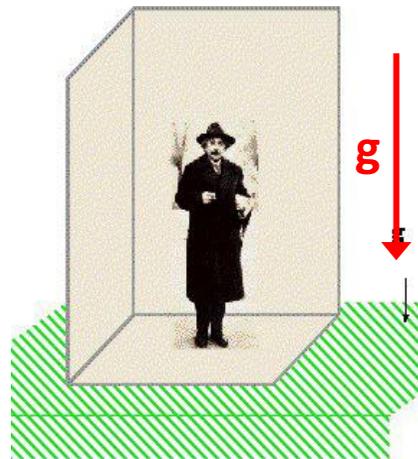
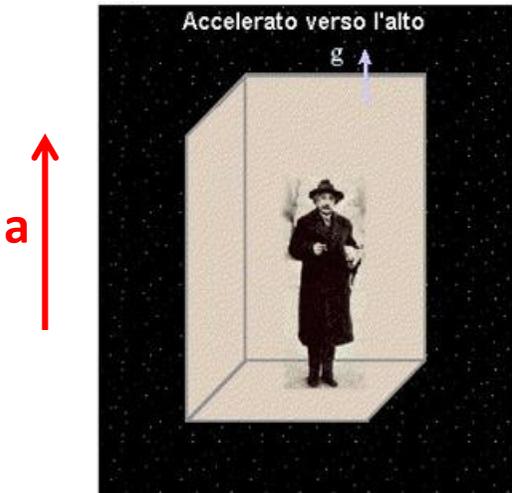
Tutto parte da un'osservazione (Einstein 1907):

Cosa succede in un ascensore, fermo sulla Terra oppure in moto accelerato nello spazio?

...non posso distinguere i due casi!

Ascensore nello Spazio

Ascensore fermo, sulla Terra



Attenzione: i due casi sono identici in una sola posizione, se mi spostassi g cambierebbe, quindi dovrei cambiare anche a .

L'indistinguibilità è locale

Einstein dice: non esiste modo di distinguere tra gli effetti di un campo gravitazionale uniforme o di un'accelerazione costante.

Quindi:

- 1) Le due masse, inerziale e gravitazionale, **DEVONO** essere uguali.
- 2) E' sempre possibile trovare un sistema (di riferimento) in cui gli effetti della forza di gravità siano identici a quelli di un'accelerazione costante [**localmente**].
- 3) Ma allora posso scrivere una legge di relatività per **TUTTI** i sistemi di riferimento, anche per quelli non inerziali. [vedi RG originale]

Da questo punto parte Einstein per enunciare la:

Teoria della Relatività Generale

Risolverà tutti (?) i problemi legati alla gravità.

3. Un nuovo concetto di spazio-tempo

Cosa dicevano Galileo e Newton:

Esiste lo Spazio assoluto, esiste il Tempo assoluto. Lo spazio è **piatto**, cioè vale la geometria di Euclide. In questo spazio valgono le leggi della dinamica. Esiste la legge di gravitazione universale che spiega l'attrazione dei corpi dovuta alla loro massa.

Cosa dice la Relatività Speciale:

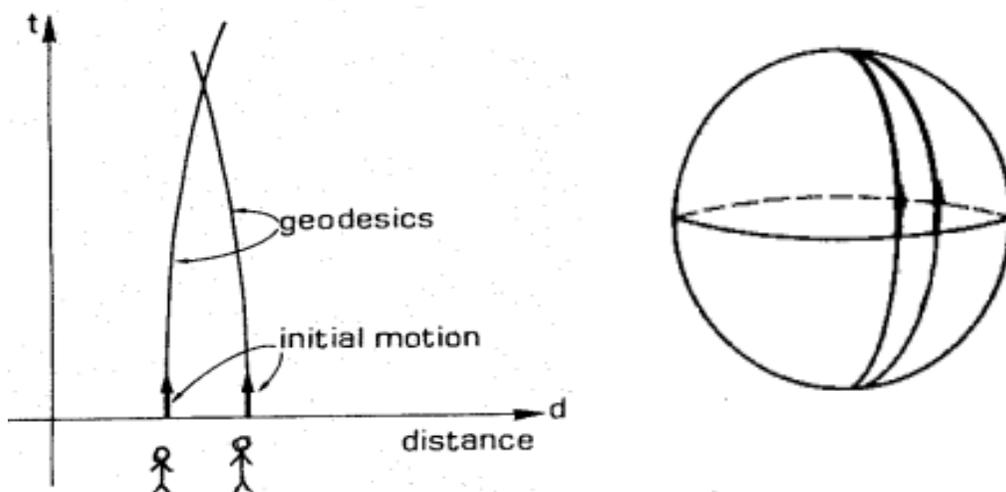
Esiste lo Spazio-Tempo. Spazi e Tempi sono relativi, tutti i sistemi inerziali sono equivalenti (non posso distinguerli). Lo spazio è **piatto**, cioè vale la geometria di Euclide. La legge di gravitazione non entra nella Relatività Speciale.

Cosa dice la Relatività Generale:

Le masse «**curvano**» lo spazio-tempo. Lo spazio-tempo non è **piatto**. I corpi si muovono seguendo le linee di universo di uno spazio curvo; non serve invocare la forza di gravità (povero Newton!). La relatività speciale continua a essere valida, ma viene estesa a sistemi accelerati, non inerziali...

Consideriamo due uomini che pensano di trovarsi in uno spazio piatto, e che si muovono «in linea retta»

Misurano la loro distanza e vedono che questa diminuisce. Da qui concludono che esiste una forza che li attrae l'uno all'altro.



Ma se li facciamo muovere ripetendo l'esperienza in uno **spazio curvo**, riusciranno a spiegare il loro avvicinamento senza dover introdurre nessuna forza esterna.

Secondo la Relatività Generale, quindi, lo spazio-tempo è uno spazio curvo di dimensione 4 $[x, y, z, t]$. Le traiettorie di un corpo in presenza di massa sono le «geodetiche»², che non sono necessariamente delle linee rette.

3.1. Lo spazio-tempo è curvato dalle masse

Ma la forza di gravità dove va a finire?

La forza di gravità non esiste (è solo comodo usarla). Quello che succede è che lo spazio senza massa/energia è piatto.

² Geodetica: è una particolare curva che descrive localmente la traiettoria più breve fra punti di un particolare spazio. Nel piano le geodetiche sono le linee rette, su una sfera sono gli archi di cerchio massimo. Può essere intesa come il percorso che compirebbe una particella non accelerata

Lo spazio in presenza di masse viene "curvato" dalle masse, che di conseguenza si muovono in uno spazio curvo "cadendo" le une verso le altre e muovendosi di conseguenza.

La realtà fisica dello spazio-tempo è descritta da un'equazione che lega la presenza di materia/energia alla metrica, cioè alla geometria dello spazio-tempo curvo.

La metrica è una funzione di quattro variabili indipendenti: (x,y,z,t).

La materia dice allo spazio-tempo come «curvarsi», e a sua volta si muove nello spazio-tempo curvo.

L'equazione di Einstein:

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}}_{\text{spazio-tempo}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{\text{materia}}$$

3.2. Conseguenze dall'equazione di Einstein

Ciò che produce la curvatura dello spazio è la materia stessa.

La curvatura determina a sua volta il moto della materia nello spazio.

La distribuzione di materia e il suo moto non possono essere descritti indipendentemente dal campo gravitazionale da essi prodotti

Effetti sullo spazio tempo:

Le lunghezze (radiali) e i tempi dipendono dalla presenza di masse «nelle vicinanze»:

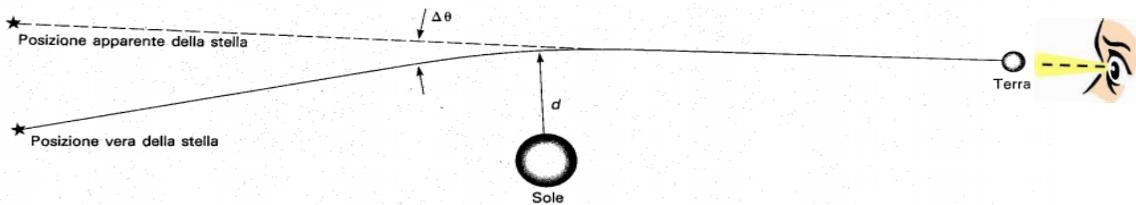
$$L(r) = L_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \quad t(r) = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$$

nota: per la Terra $\frac{2GM_T}{c^2} = r_s \cong 9 \text{ mm}$, il fattore r_s ci dice la scala degli effetti

Uno spazio curvo in due dimensioni:

un esempio pratico: $a=89^0$ $b=70^0$ $c=70^0$ $a+b+c= 229^0$

Un raggio di luce, al pari di un oggetto dotato di massa, deve subire l'azione del campo gravitazionale, ed eventualmente esserne "incurvato".



La prima verifica si ebbe da parte di Sir A. Eddington nel 1919 dallo studio di un'eclisse solare.

Si osservò una deflessione di circa 1.7 secondi d'arco (questo angolo corrisponde al diametro di una moneta vista dalla distanza circa 3 km).

La teoria aveva la prima verifica sperimentale: la luce curva o «cade» in un campo gravitazionale

IL FOTONE

La massa equivalente

$$E = m_e c^2 = hf$$

$$\text{quindi: } m_e = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$$

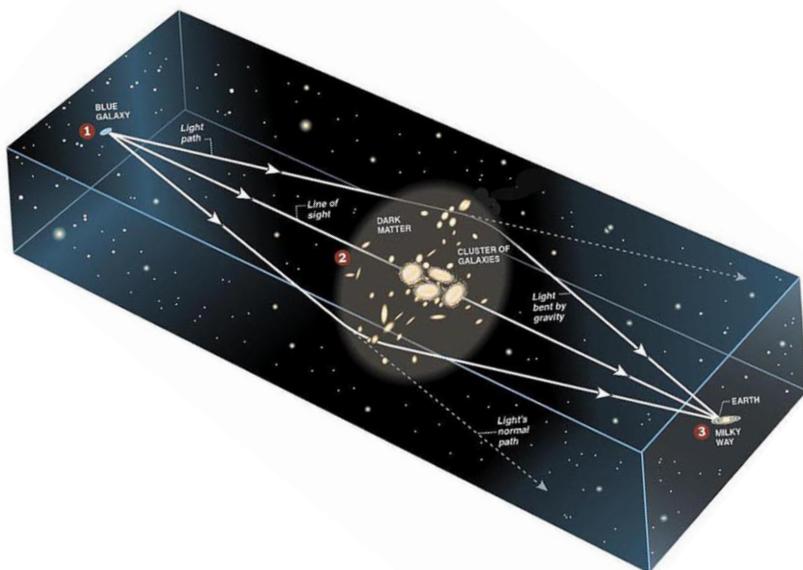
Non è una massa a riposo,
Il fotone non è mai a riposo.

3.3. Un effetto di curvatura galattica

La Luminous Red Galaxy è ha una massa 5,5 volte maggiore di quella della nostra Galassia.

E' distante 4,5 Miliardi di anni luce.

La Blue Galaxy dista 10,9 Miliardi di anni luce.



3.4. Un effetto quotidiano: il GPS

I satelliti del GPS inviano un raggio di onde e.m. verso il nostro ricevitore, il fascio viene riflesso, dal ritardo fra emissione e ricezione si misura la distanza.

Combinando i dati di tre satelliti si misura la posizione.

Ma gli orologi sui satelliti sono sottoposti alla forza di gravità, che è differente da quella sulla Terra. Quindi misurano un tempo differente da quello che misurerebbero sulla Terra.

Come va il tempo «in presenza di gravità» $t(\mathbf{R}) \cong t_{\infty} \left(1 - \frac{R_0}{2R}\right)$ dove

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2}$$

Se ci mettiamo i vari dati...la massa e il raggio della Terra, l'altezza dei satelliti...

Arriviamo ad una correzione, su di un giorno, di circa 53 μs ...poi c'è la correzione della Relatività Speciale....tutti questi errori se non corretti, porterebbero ad un errore, nella posizione, di vari chilometri (circa 5 km).

E il GPS darebbe sempre un'indicazione sbagliata!!!

