

Corso di Fisica Nucleare e Subnucleare II (6cf)

Masse e  
Oscillazioni dei Neutrini  
Lezioni 3-4

Lucio Ludovici  
12 maggio 2010

[Lucio.Ludovici@roma1.infn.it](mailto:Lucio.Ludovici@roma1.infn.it)

# Calendario Lezioni Oscillazioni

Lezione	Data	Orario	Aula
1-2	Martedì 11 maggio	11-13	Aula 3
3-4	Mercoledì 12 maggio	13-15	Aula 4
5-6	Martedì 18 maggio	11-13	Aula 3

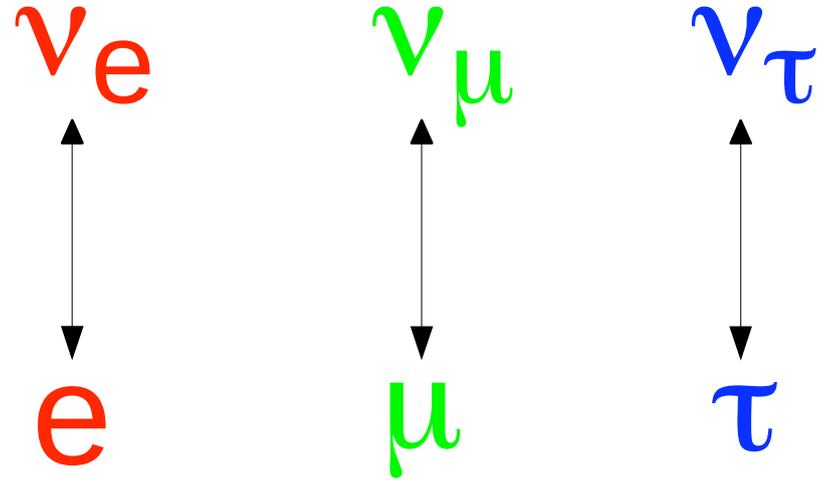


# Programma lezioni 3-4

1. Matrice di mixing per tre famiglie di leptoni. Unitarietà della matrice di mixing. Parametrizzazione della matrice di mixing.
2. Oscillazioni nel vuoto per tre famiglie. Violazione di CP.
3. Caso limite di due famiglie. Formule approssimate: one mass dominance. Interpretazione del plot  $\Delta m^2$  vs  $\sin^2 2\theta$ . Valore sperimentale dei parametri della matrice di mixing.
4. Oscillazioni nella materia, meccanismo MSW.

# 3 “sapori” distinti di neutrino

Ognuno associato al  
corrispondente leptone  
carico



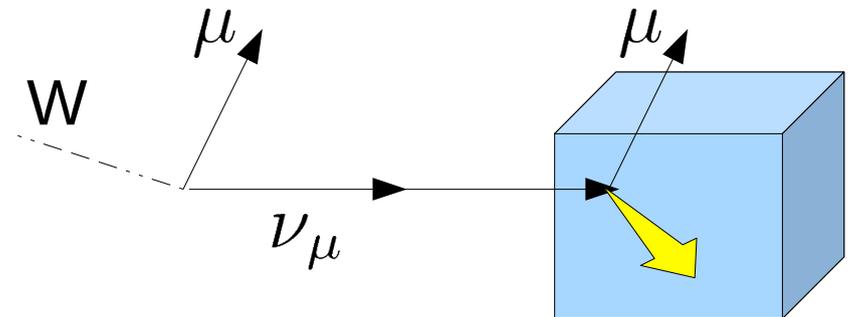
$$J_{\mu}^{CC} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{l}_{\alpha L} \gamma_{\mu} \nu_{\alpha L}$$

Corrente Carica

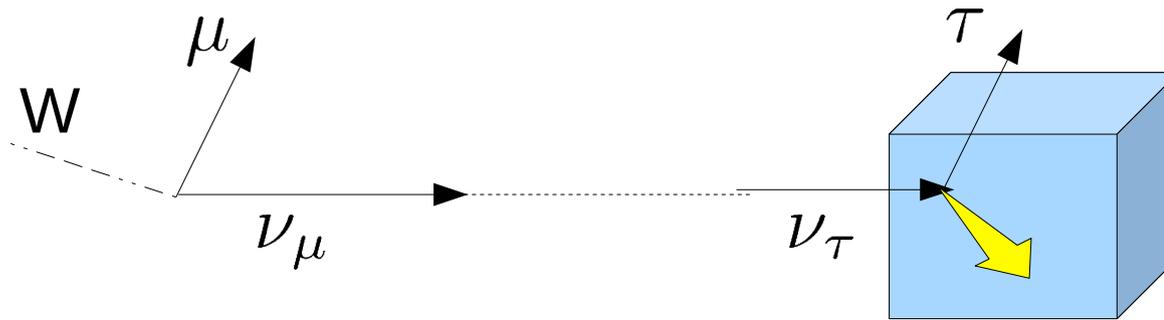
$$J_{\mu}^{NC} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_{\mu} \nu_{\alpha L}$$

Corrente Neutra

Significato sperimentale:



# Cambiamenti di sapore



I neutrini non cambiano sapore  
(su un percorso “breve”)

Se i neutrini hanno massa e i leptoni si mescolano allora i neutrini **cambiano sapore**  
(su un percorso “sufficientemente lungo”)

# Mescolamento (mixing) dei leptoni

$$W^+ \rightarrow l_\alpha^+ + \nu_\alpha$$

$\nu_\alpha \equiv \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$

$l_\alpha^+ \equiv e^+, \mu^+, \tau^+$

In generale lo stato di neutrino  $|\nu_\alpha\rangle$  che accompagna un leptone di sapore definito  $\alpha$  è:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1,3} U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$$

neutrino di massa definita

neutrino di sapore definito

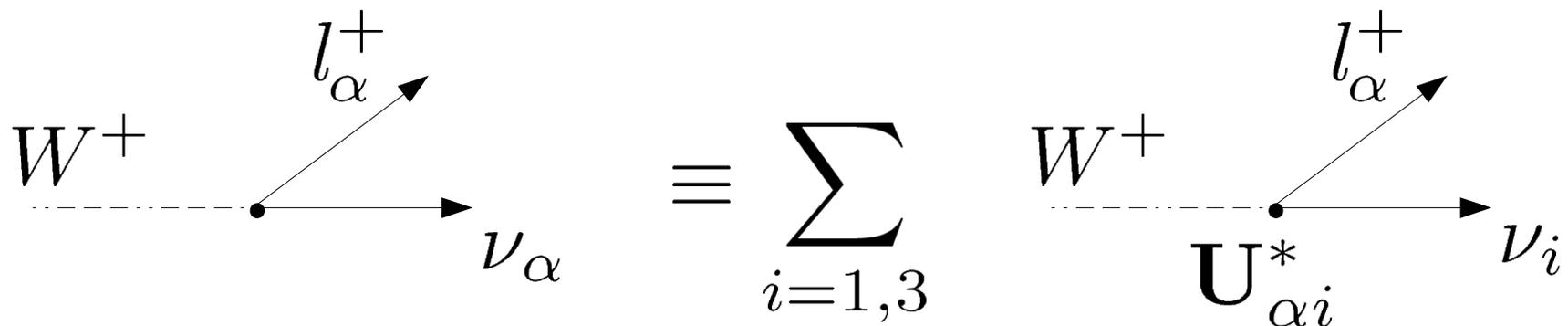
matrice di mescolamento leptonico

# Cosa vuol dire ?

Lo stato di neutrino di sapore definito è la sovrapposizione lineare degli stati di neutrino di massa definita:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1,3} \mathbf{U}_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$$

(Ah, la meccanica quantistica !)



Un leptone di un certo sapore è accompagnato da ciascun neutrino di massa definita, con ampiezza di probabilità:

$$Amp \left( W^+ \rightarrow l_\alpha^+ + \nu_i \right) = \mathbf{U}_{\alpha i}^*$$

# Matrice di mixing

Lo stato di neutrino di sapore definito è la sovrapposizione lineare degli stati di neutrino di massa definita:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1,3} \mathbf{U}_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$$

Matrice 3x3 unitaria:  $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}$

$$|\langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle|^2 = |\mathbf{U}_{\alpha i}|^2$$

Lo stato di neutrino di massa definita è la sovrapposizione lineare degli stati di neutrino di sapore definito:

$$|\nu_i\rangle = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \mathbf{U}_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle$$

In alcuni modelli esistono neutrini sterili (che non si accoppiano a W,Z) e la matrice di mescolamento è NxN (N>3)

# Conteggio dei parametri della matrice di mixing

$$J_\mu^{NC} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_\mu \nu_{\alpha L} = 2 \sum_{k=1,3} \bar{\nu}_{k L} \gamma_\mu \nu_{k L} \quad \text{NC è diagonale}$$

$$J_\mu^{CC} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{l}_{\alpha L} \gamma_\mu \nu_{\alpha L} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1,3} \bar{l}_{\alpha L} \gamma_\mu U_{\alpha k} \nu_{k L}$$

**U** matrice 3x3       $2N^2 = N^2$  angoli +  $N^2$  fasi      9 angoli + 9 fasi

$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{1}$        $N^2 = N(N-1)/2$  angoli +  $N(N+1)/2$  fasi      3 angoli + 6 fasi

$l_\alpha \rightarrow e^{i\phi_\alpha} l_\alpha$       - N fasi      3 angoli + 3 fasi

$\nu_\alpha \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \nu_\alpha$  (Dirac)      - (N-1) fasi      3 angoli + 1 fase

Angoli	Fasi di Dirac	Fasi di Majorana
$N(N-1)/2$	$(N-1)(N-2)/2$	$(N-1)$

N=3

3

1

2

# Parametrizzazione della matrice di mixing

$$U = \mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{13}^C\mathbf{R}_{12}\mathbf{D}(\phi_2, \phi_3)$$

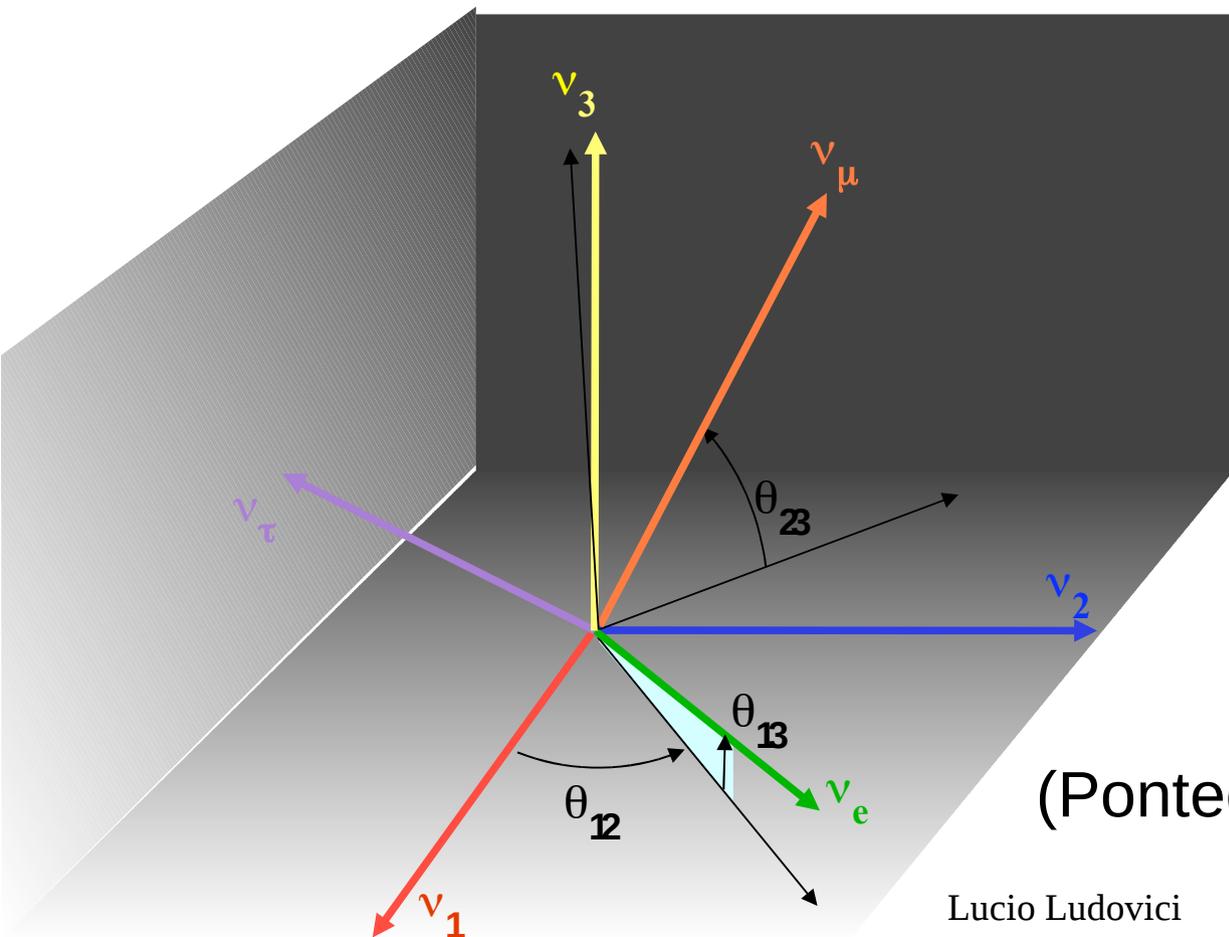
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & e^{-i\delta} s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -e^{i\delta} s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_3} \end{pmatrix}$$

atmosferici

“terra incognita”

solari

$\Delta L=2$



Matrice PMNS  
(Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata)

# Tipiche soglie di rivelazione dei neutrini

Processo	Esperimenti	Energia minima
$\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$	Solari: Homestake	814 KeV
$\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow {}^{71}\text{Ge} + e^-$	Solari: Gallex, Sage, GNO	233 KeV
$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$	Reattori: Chooz, Kamland	1.8 MeV
$\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$	Atmosferici., Acceler: SK, K2K, Minos,	110 MeV
$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$	Atmosferici, Acceler: SK, *BooNE,...	113 MeV
$\nu_\tau + n \rightarrow p + \tau^-$	Acceleratori: Opera, Donut	3.4 GeV
$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-$	Solari: SNO, SK, Borexino	~5 MeV (SNO, SK) ~0.5 MeV (Borexino)

$$E_{soglia} = \frac{(M_B + M_C)^2}{2M_A} - \frac{M_A}{2}$$

$$\nu + A \rightarrow B + C$$

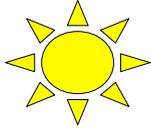
$$\sigma_{el.sc.} \sim \sigma_0 E / m_e$$

$$\sigma_0 \sim 10^{-44} \text{ cm}^2$$

A causa delle energie di soglia e di rapporto segnale/rumore  
I neutrini rivelabili sono sempre ultra-relativistici:  $E \gg m\nu$

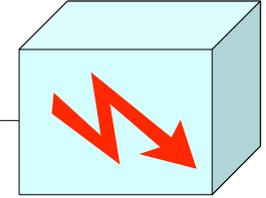
# Le oscillazioni dei neutrini (nel vuoto)

sorgente di neutrini

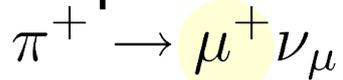


propagazione

rivelatore



autostato  $\alpha$   
di sapore definito



sovrapposizione di autostati di massa  
→ fasi differenti → interferenza

autostato  $\beta$   
di sapore definito

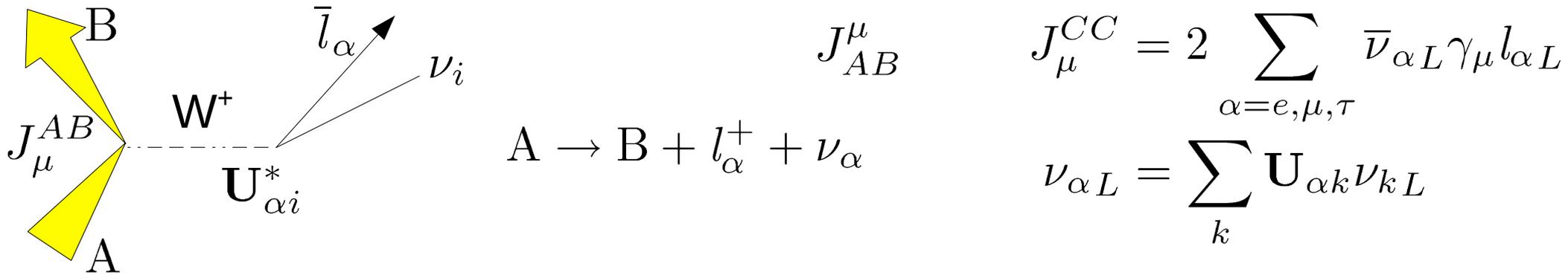


$$\begin{aligned}
 & Amp \left( \begin{array}{c} \text{B} \\ \nearrow \\ J_\mu^{AB} \\ \searrow \\ \text{A} \end{array} \cdot W^+ \begin{array}{c} \uparrow l_\alpha^+ \\ \nu_\alpha \\ \rightarrow \\ \nu_\beta \\ \uparrow l_\beta^- \end{array} \cdot W^+ \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{A} \\ \searrow \\ \text{B} \end{array} \right) = \\
 & = \sum_i Amp \left( \begin{array}{c} \text{B} \\ \nearrow \\ J_\mu^{AB} \\ \searrow \\ \text{A} \end{array} \cdot W^+ \begin{array}{c} \uparrow l_\alpha^+ \\ \nu_i \text{ prop}(\nu_i) \\ U_{\alpha i}^* \end{array} \cdot W^+ \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{A} \\ \searrow \\ \text{B} \end{array} \cdot U_{\beta i} \begin{array}{c} \uparrow l_\beta^- \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

N.B. Interferenza:

$$\left| \sum_i Amp \right|^2 \neq \sum_i |Amp|^2 = \sum_{i=1,3} |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2$$

# La probabilità di oscillazione



Il neutrino prodotto di sapore definito è una sovrapposizione lineare degli stati massivi

$$|\nu_\alpha\rangle \propto \sum_{k=1,3} |\nu_k\rangle \langle \nu_k, l_\alpha^+ | J_\mu^{CC} | 0 \rangle J_{AB}^\mu \longrightarrow |\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1,3} U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle$$

$\propto U_{\alpha k}^*$       trascurando gli effetti di massa nella produzione  $\rightarrow$  neutrini ultra-relativistici

L'evoluzione nel tempo dello stato è

$$|\nu(\vec{x}, t)\rangle = e^{-i\mathbf{H}t + i\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{x}} |\nu_\alpha(\vec{0}, 0)\rangle \quad |\nu(L, t)\rangle = \sum_{k=1,3} U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t + ip_k L} |\nu_k\rangle$$

$$|\nu(L, t)\rangle = \sum_{k=1,3} U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t + ip_k L} \sum_{\beta=e\mu\tau} U_{\beta k} |\nu_\beta\rangle$$

# Probabilità di oscillazione

L'ampiezza della transizione  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  è

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, t) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(L, t) \rangle|^2 = \left| \sum_{k=1,3} \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} e^{-iE_k t + i p_k L} \right|^2$$

Per neutrini ultra-relativistici  $t = L$  e la fase dipende solo da  $m_k^2, E$

$$E_k t - p_k L \simeq (E_k - p_k)L = \frac{E_k^2 - p_k^2}{E_k + p_k} \simeq \frac{m_k^2}{2E} \quad \text{Per una trattazione rigorosa B.Kayser Phys.Rev.D24 (1981) 110}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \left| \sum_{k=1,3} \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} e^{-i \frac{m_k^2 L}{2E}} \right|^2 \\ &= \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}} \end{aligned}$$

Con  $\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2$  ,  $\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*$

# Alcune considerazioni

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}}$$

$$\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*$$

- Con tre famiglie ci sono 2  $\Delta m_{ij}^2$  indipendenti ( $\Delta m_{13}^2 = \Delta m_{12}^2 + \Delta m_{23}^2$ )
- Oscillazione sensibili solo a  $\Delta m_{ij}^2$ , non alle masse assolute
- Oscillazione richiede neutrini non degeneri
- Fenomeno quantistico di interferenza:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) \xrightarrow{\Delta p \ll \Delta m_k} \langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \rangle_L = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2$$

- Le fasi di Majorana non sono osservabili nelle oscillazioni:

$$\mathbf{U}^D D = \mathbf{U}^{DIRAC} \text{diag}(1, e^{i\phi_2}, e^{i\phi_3})$$

$$\mathbf{U}_{\beta i} \mathbf{U}_{\alpha i}^* = \mathbf{U}_{\beta j}^D D_{ji} D_{ki}^* \mathbf{U}_{\alpha k}^D = \mathbf{U}_{\beta i}^D \mathbf{U}_{\alpha i}^{D*} \delta_{ji} \delta_{ki} e^{i(\phi_j - \phi_k)}$$

- Le oscillazioni sono descritte da 6 parametri:  $\Delta m_{12}^2, \Delta m_{23}^2, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta$

# Alcune proprietà

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta(*)} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}}$$

$$\triangleright \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{W}_{kj}^{\beta\alpha*} = \mathbf{W}_{jk}^{\alpha\beta*} = \mathbf{W}_{jk}^{\beta\alpha} \quad \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*$$

$$\triangleright \mathbf{U} \xleftrightarrow{CP} \mathbf{U}^* \quad \mathbf{U} \xleftrightarrow{CPT} \mathbf{U}^* \\ \nu \leftrightarrow \bar{\nu} \quad \nu \leftrightarrow \bar{\nu} \\ \alpha \leftrightarrow \beta$$

$$\triangleright \text{La probabilità è invariante sotto CPT: } \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}} \equiv \mathcal{P}_{\bar{\nu}_{\beta} \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha}}$$

$$\text{inoltre: } \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}} \equiv \mathcal{P}_{\bar{\nu}_{\alpha} \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha}} \quad \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}} \equiv 1 - \sum_{\beta \neq \alpha} \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}} \quad \text{prob. di sopravvivenza}$$

$\triangleright$  Per  $\delta = 0$  ( $\mathbf{U}_{\alpha k}$  reali) la probabilità è invariante sotto CP:

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k}^2 \mathbf{U}_{\beta k}^2 + 2 \sum_{k>j} \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j} \cos \left( \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right)$$

$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j} \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right)$$

# Altre forme della probabilità di oscillazione

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta(*)} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}}$$

Separando i contributi della parte reale e immaginaria di  $\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}$  si evidenziano le parti CP-pari e CP-dispari

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2 \sum_{k>j} \Re\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \cos\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) + 2 \sum_{k>j} \Im\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} + 4 \sum_{k>j} \Re\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E}\right) + 2 \sum_{k>j} \Im\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)$$

# Asimmetria di CP, violazione di CP leptonica

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = \frac{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}}{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} + \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}}$$

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = \frac{2 \sum_{k>j} \Im\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)}{\delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E}\right)}$$

Invariante di Jarsholg  $J_{\alpha\beta;kj} = \Im\{\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*\} = \pm \mathbf{J}$

Analogo all'area dei triangoli unitari in CKM:  $\mathbf{J}^{\text{CKM}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= c_{12} s_{12} c_{23} s_{23} c_{13}^2 s_{13} \sin \delta = \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \theta_{13} \sin \delta \\ &= \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \theta_{13} \sin \delta \approx 0.23 \sin \theta_{13} \sin \delta \\ &\quad \approx 0.9 \quad \approx 1 \quad \approx 1 \end{aligned}$$

La possibilità di misurare ~~CP~~L è legata al valore di  $\theta_{13}$

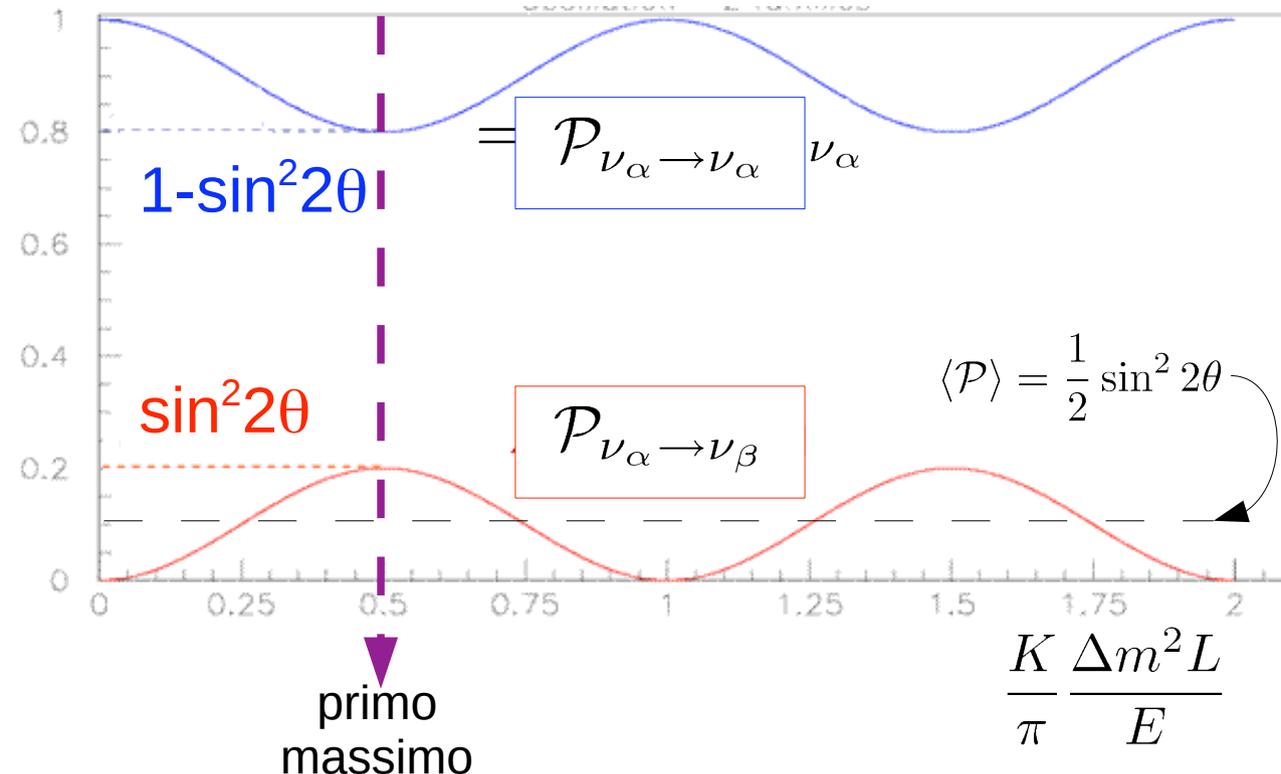
# Probabilità di oscillazione a 2 famiglie

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$$

Importante storicamente e nella pratica degli esperimenti di oscillazione  
 Approssimazione delle formule generali valida in molti casi

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m^2 L}{4E} &= \frac{1}{\hbar c} \frac{\Delta m^2 L}{4E} = K \frac{\Delta m^2 L}{E} \\ &\simeq 1.27 \frac{\Delta m^2 [eV^2] L [Km]}{E [GeV]} \end{aligned}$$



**ESEMPIO**

Il primo massimo di oscillazione  
 con  $\Delta m^2 = 2 \cdot 10^{-3} eV^2$   
 $E = 1 \text{ GeV}$

si ha per

$$L = \frac{\pi}{2} \frac{E [GeV]}{1.27 \Delta m^2 [eV^2]} = 618 \text{ Km}$$

# Dipendenza da L, E

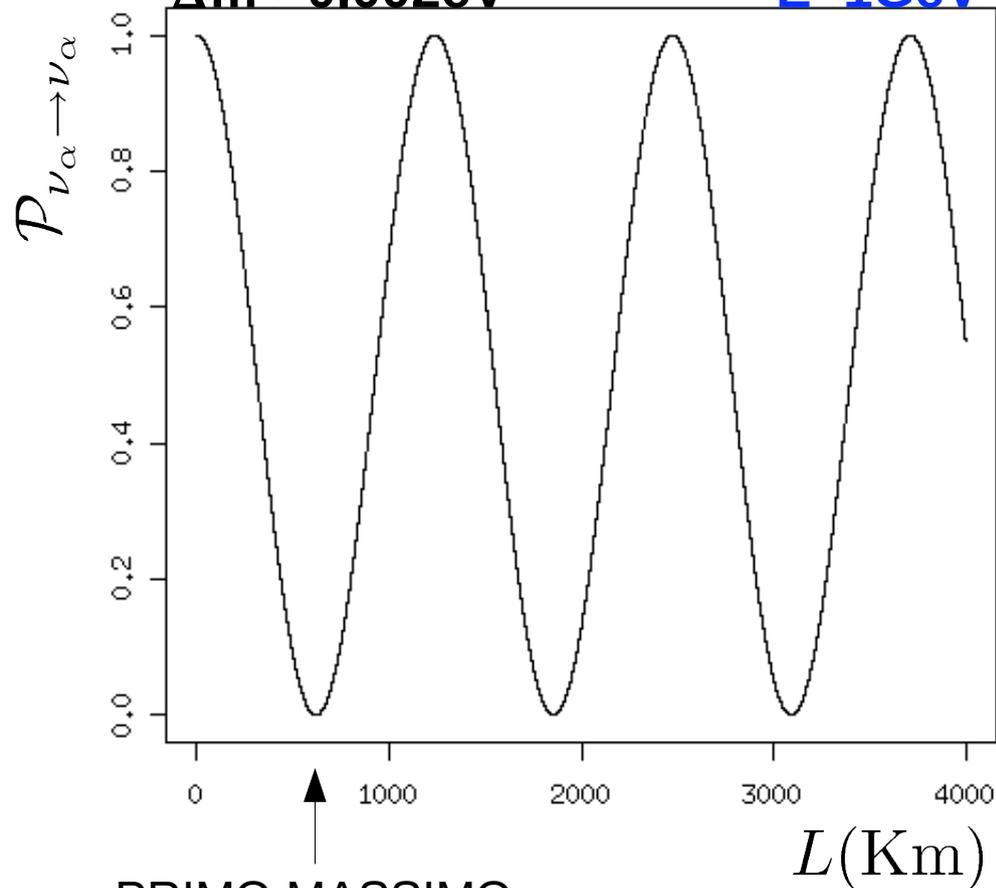
Probabilità di sopravvivenza

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$

$\sin^2 2\theta = 1$

$\Delta m^2 = 0.002 \text{eV}^2$

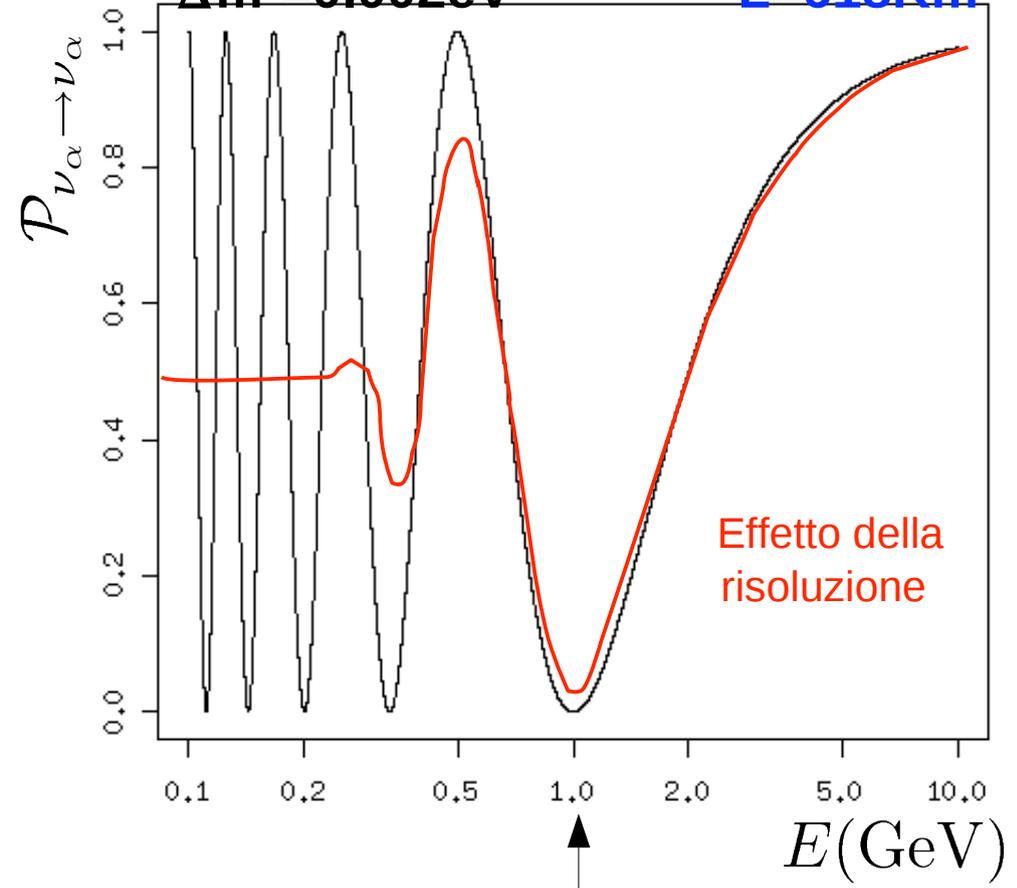
$E = 1 \text{GeV}$



$\sin^2 2\theta = 1$

$\Delta m^2 = 0.002 \text{eV}^2$

$L = 618 \text{Km}$

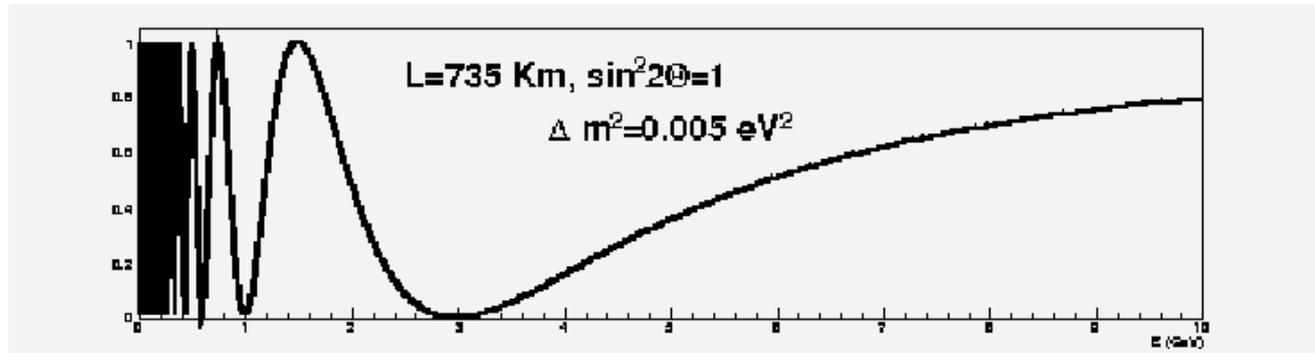


PRIMO MASSIMO  
DI  
OSCILLAZIONE

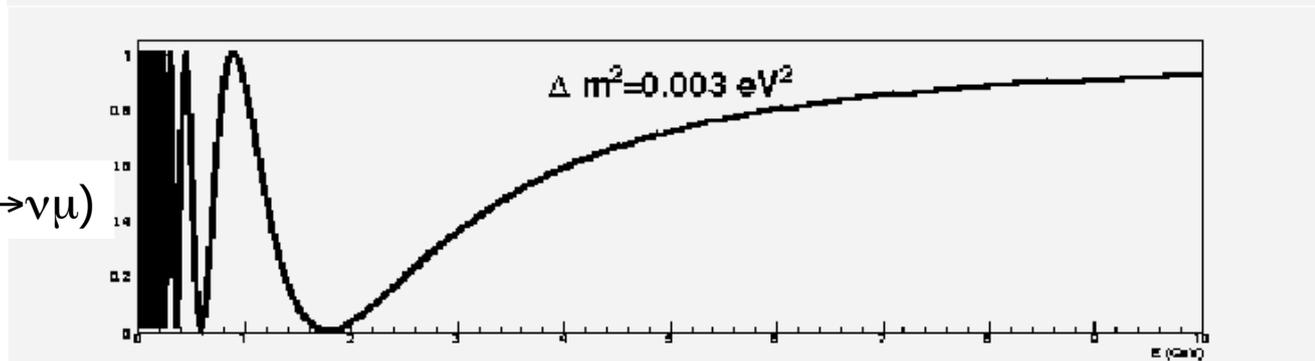
PRIMO MASSIMO  
DI  
OSCILLAZIONE

# Dipendenza da E

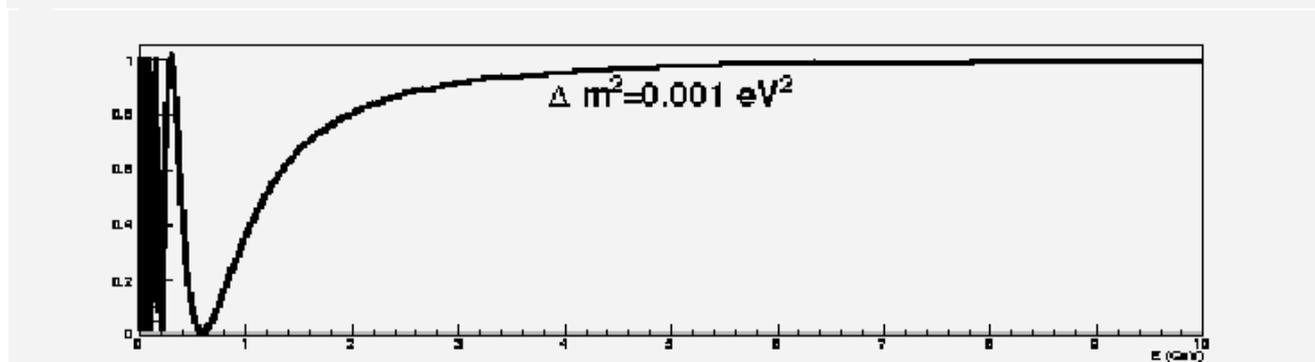
L=735 Km



$\sin^2 2\theta=1$   
 $\Delta m^2=0.005 \text{ eV}^2$



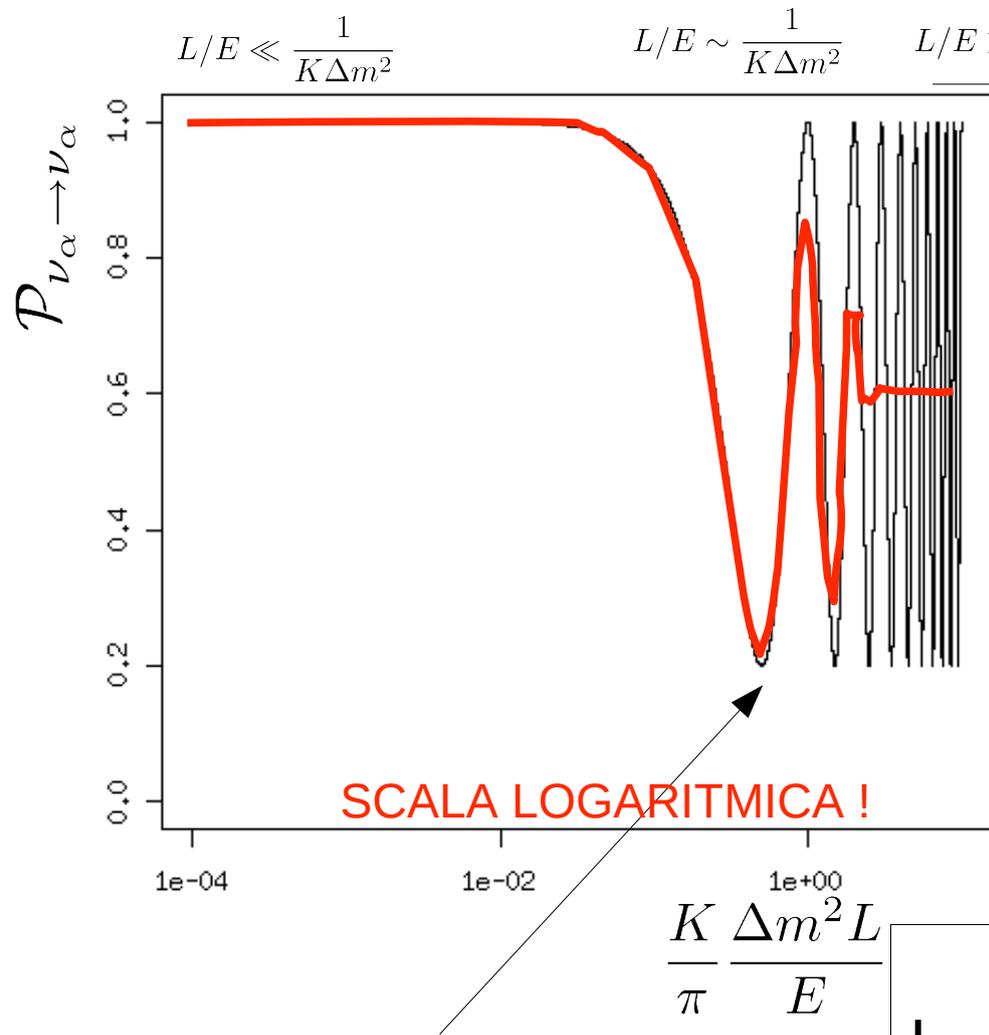
$\sin^2 2\theta=1$   
 $\Delta m^2=0.003 \text{ eV}^2$



$\sin^2 2\theta=1$   
 $\Delta m^2=0.001 \text{ eV}^2$

E(GeV)

# Sensibilità alle oscillazioni



$L/E \ll \frac{1}{K\Delta m^2}$        $L/E \sim \frac{1}{K\Delta m^2}$        $L/E \gg \frac{1}{K\Delta m^2}$

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$

- $L/E \ll \frac{1}{K\Delta m^2}$  le oscillazioni non hanno “tempo” di svilupparsi
- $L/E \approx \frac{1}{K\Delta m^2}$  massimo della sensibilità
- $L/E \gg \frac{1}{K\Delta m^2}$  la risoluzione impedisce di risolvere le oscillazioni:  
→ si misura  $\langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} \rangle$

Massimo della sensibilità

$$L/E = \frac{\pi}{2K\Delta m^2}$$

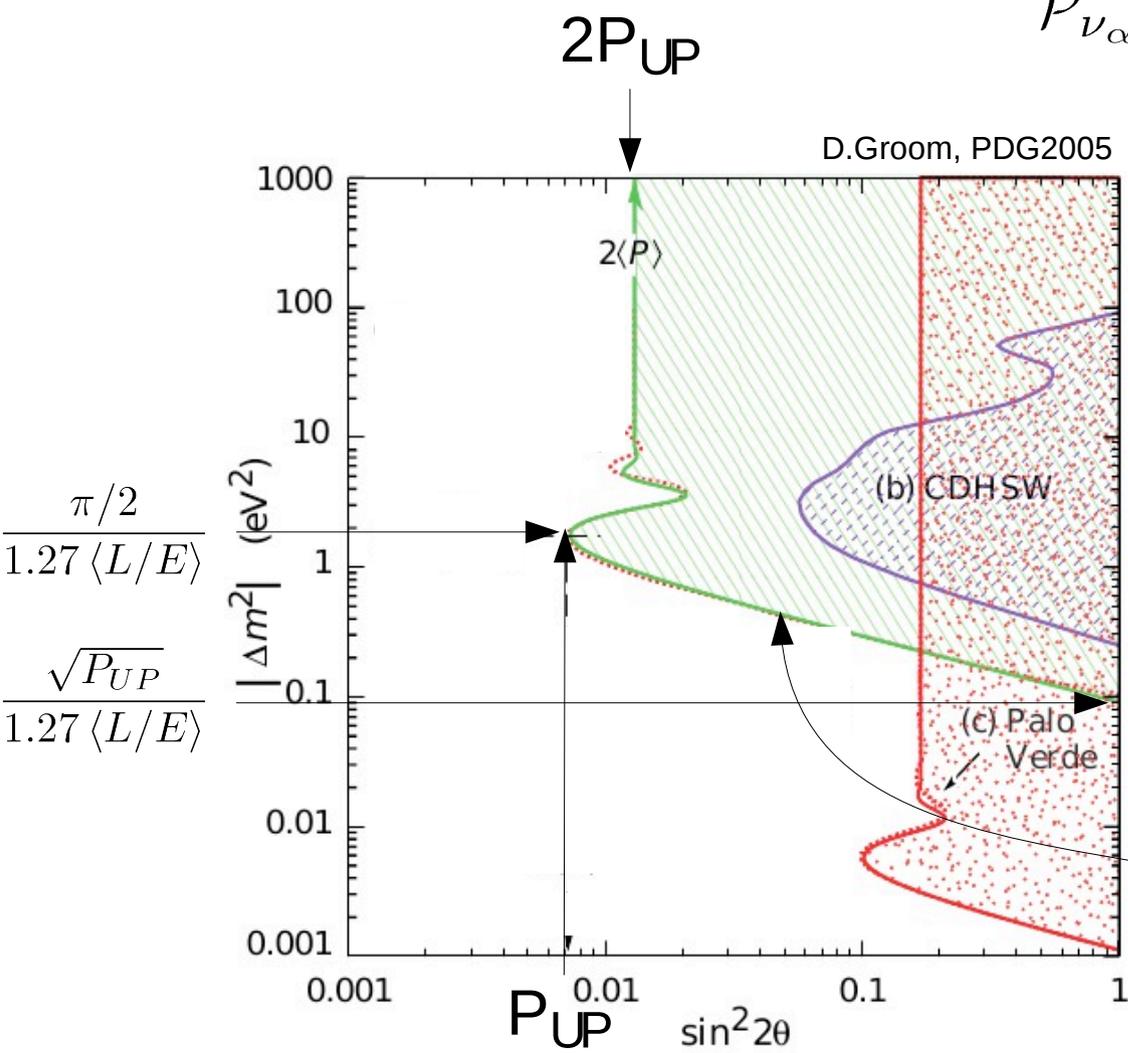
**RISOLUZIONE L/E**

L → sorgente estesa (atmosfera, sole, tunnel di decadimento,...)

E → misurata con  $\Delta E/E$  o talvolta non misurata, sorgente con spettro esteso

# Interpretazione del plot $\Delta m^2$ vs $\sin^2 2\theta$

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$



Ricerca negativa:  
 $P < P_{UP}$  al 90%CL  
 upper limit  $\rightarrow$  plot di esclusione

Ricerca positiva:  
 $P_{MIN} < P (< P_{MAX})$  al 90%CL  
 scoperta  $\rightarrow$  plot di inclusione

$\rightarrow$  Curve di iso-probabilità

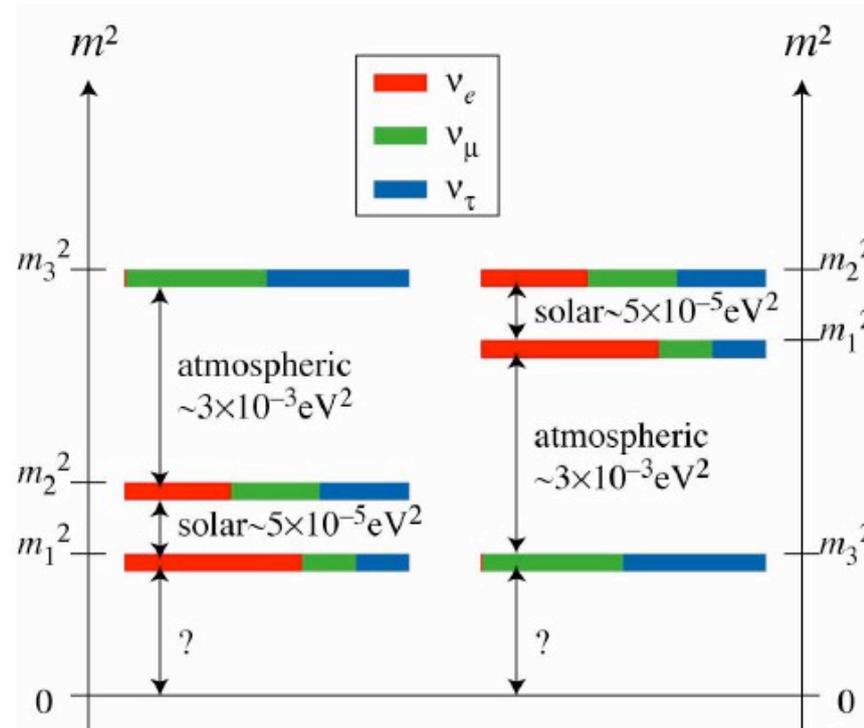
Per  $\frac{\Delta m^2 L}{E} \ll 1$   $P < P_{UP}$  diventa  
 $\sin^2 2\theta \left( \frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right)^2 < P_{UP}$

$$\Delta m^2 = \frac{\sqrt{P_{UP}}}{1.27 \langle L/E \rangle \sqrt{\sin^2 2\theta}}$$

Il caso semplificato di due neutrini come ci aiuta  
a interpretare la formula di oscillazione completa  
per tre famiglie ?

# One mass-scale dominance: $\Delta m^2_{23} \gg \Delta m^2_{12}$

In molti casi, un esperimento con L/E vicino al massimo di sensibilità per un certo  $\Delta m^2$ , ha un effetto costante (indipendente da L/E) dall'altro  $\Delta m^2$



$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \simeq S_{\alpha\beta} \sin^2 \left( \frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right)$$

$$S_{\alpha\beta} = 4 \left| \sum \mathbf{U}_{\alpha i}^* \mathbf{U}_{\beta i} \right|^2$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} \simeq 1 - 4T_\alpha (1 - T_\alpha) \sin^2 \left( \frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right)$$

$$T_\alpha = \sum |\mathbf{U}_{\alpha i}|^2$$

Formule approssimate della stessa forma della formula di oscillazione per 2 neutrini

→ Parametri efficaci

# Formule approssimate

Esperimenti a distanze terrestri, con  $\Delta m_{12} L/E \ll 1$ , sono descritti solo da 3 parametri:  $\theta_{23}$ ,  $\Delta m_{12}$ ,  $\theta_{13}$  e da formule simili a quelle per 2 famiglie:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \cong \sin^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23} = \sin^2 2\theta_{\mu e} \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \cong \cos^4\theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \Delta_{23} = \sin^2 2\theta_{\mu\tau} \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) \cong \cos^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23} = \sin^2 2\theta_{e\tau} \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \cong 1 - (\sin^2 2\theta_{\mu\tau} + \sin^2 2\theta_{\mu e}) \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \cong 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23}$$

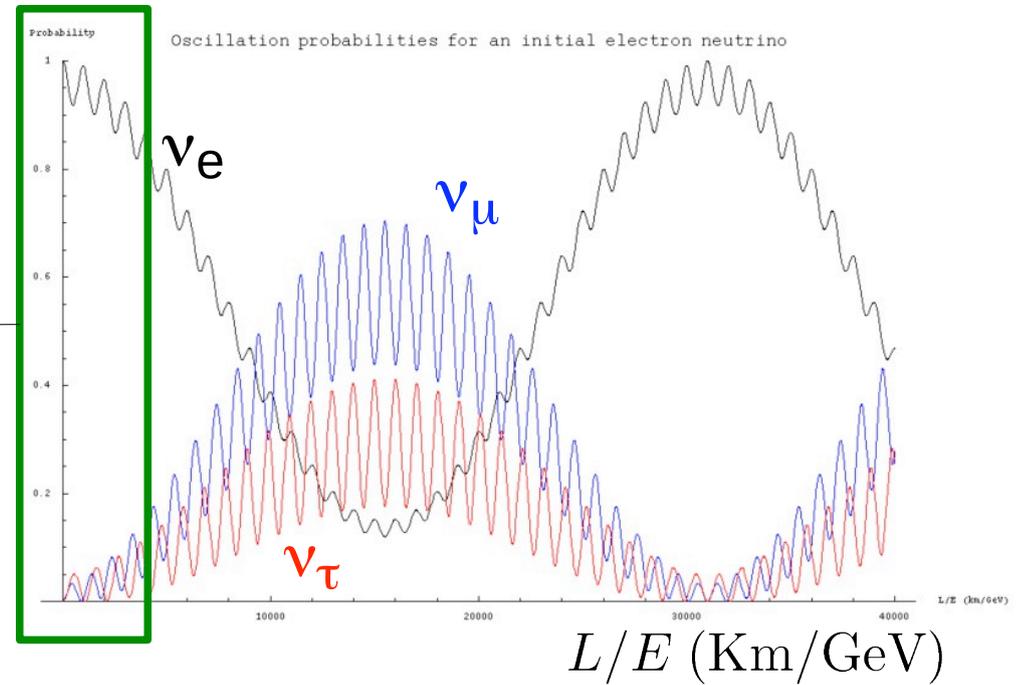
Angoli di mixing efficaci:

$$\sin^2 2\theta_{\mu e} = \sin^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \cong 0.5 \sin^2 2\theta_{13}$$

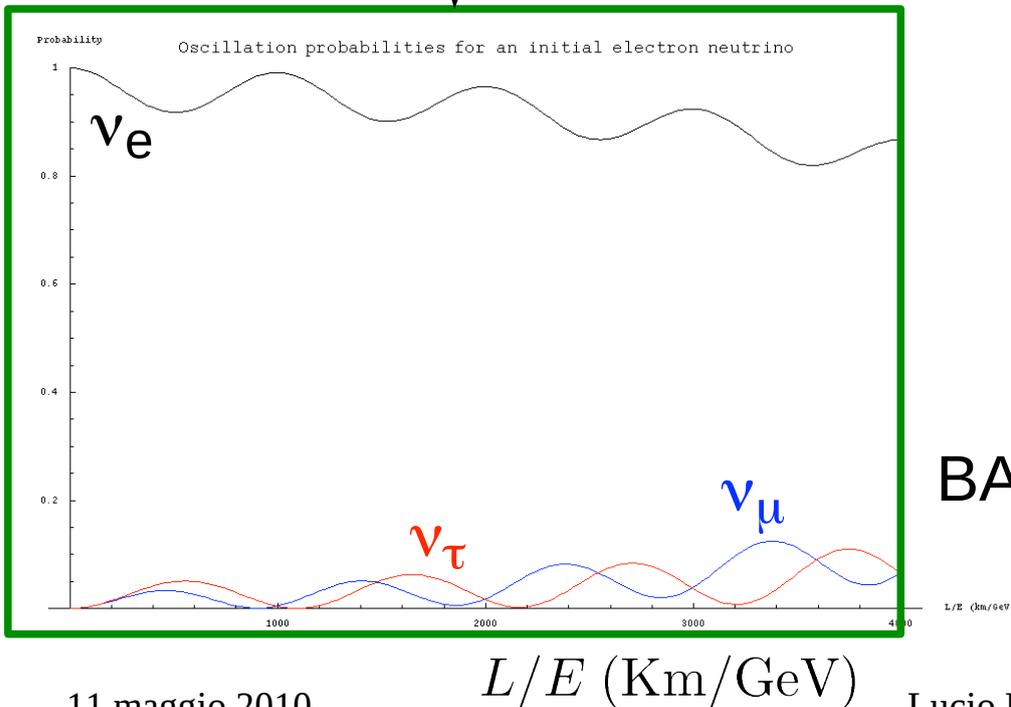
$$\sin^2 2\theta_{\mu\tau} = \cos^4\theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \cong \sin^2 2\theta_{23}$$

$$\sin^2 2\theta_{e\tau} = \cos^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \cong 0.5 \sin^2 2\theta_{13}$$

# Probabilità di oscillazione $\nu_e$

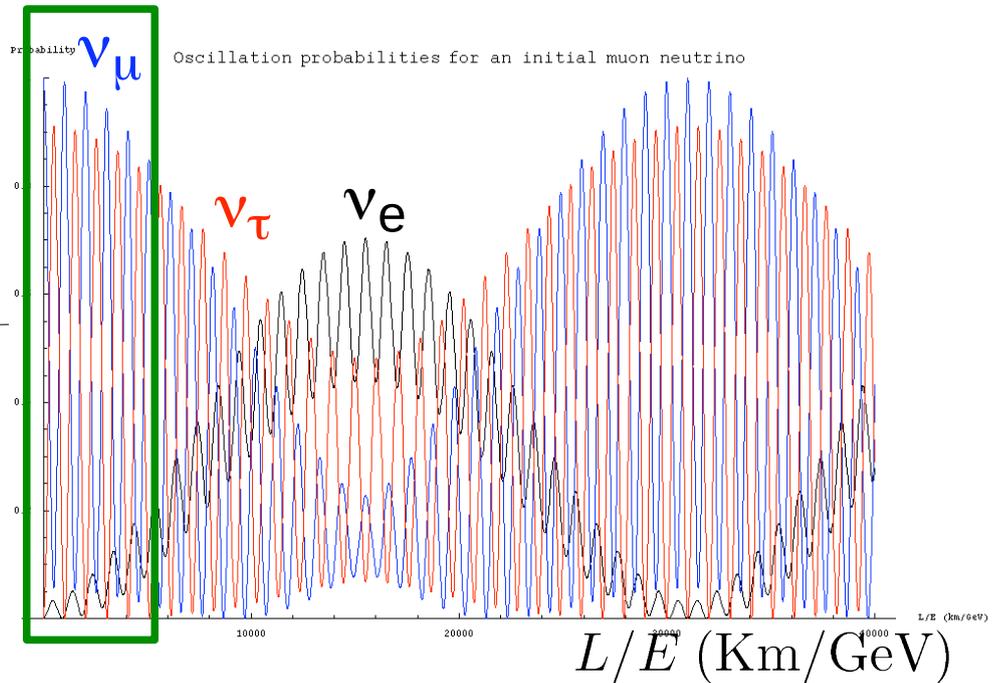


BASELINE LUNGA

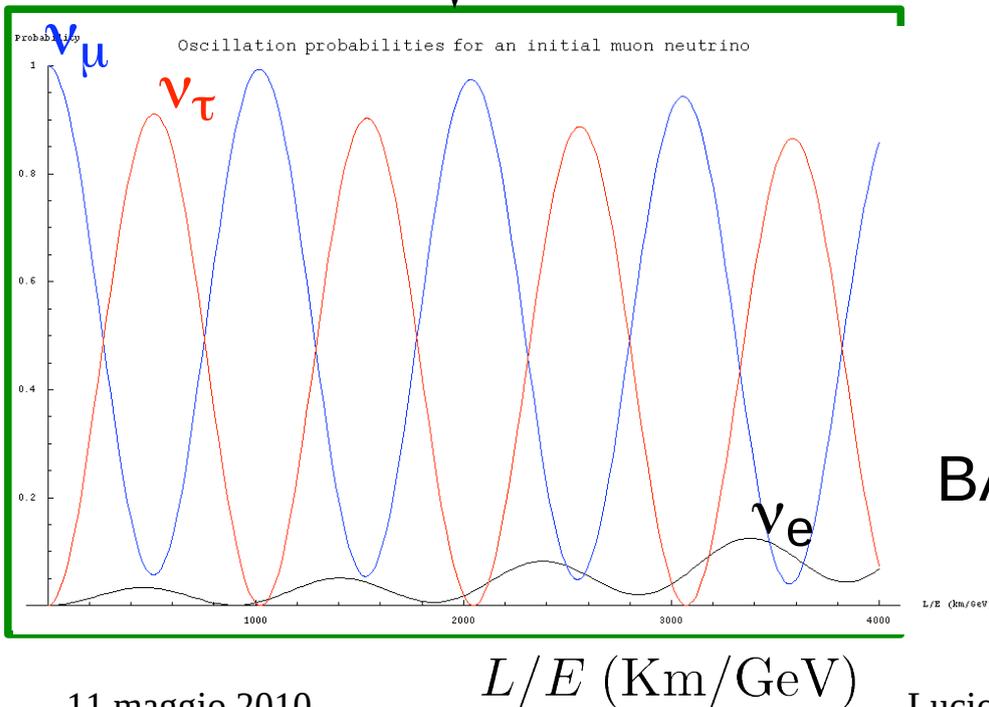


BASELINE CORTA

# Probabilità di oscillazione $\nu_\mu$

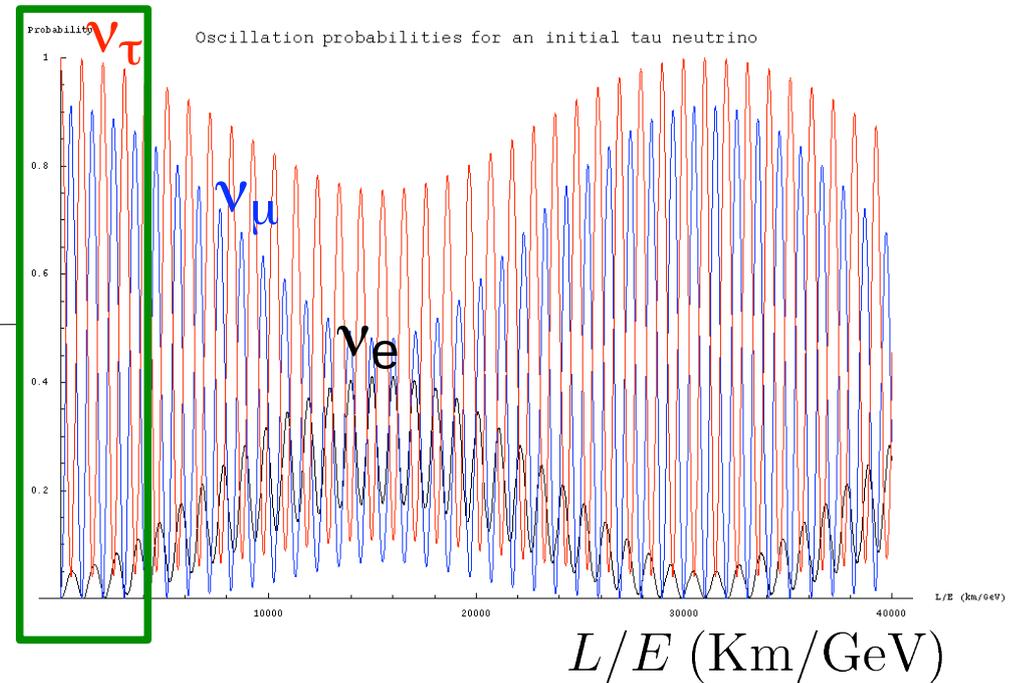


BASELINE LUNGA

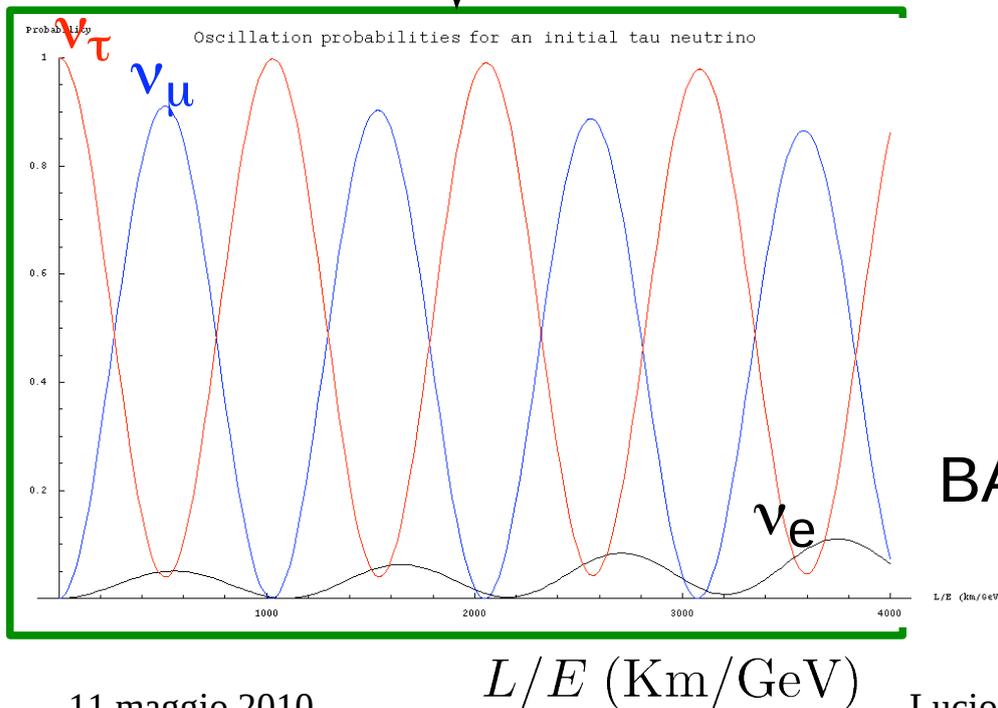


BASELINE CORTA

# Probabilità di oscillazione $\nu_\tau$



BASELINE LUNGA



BASELINE CORTA

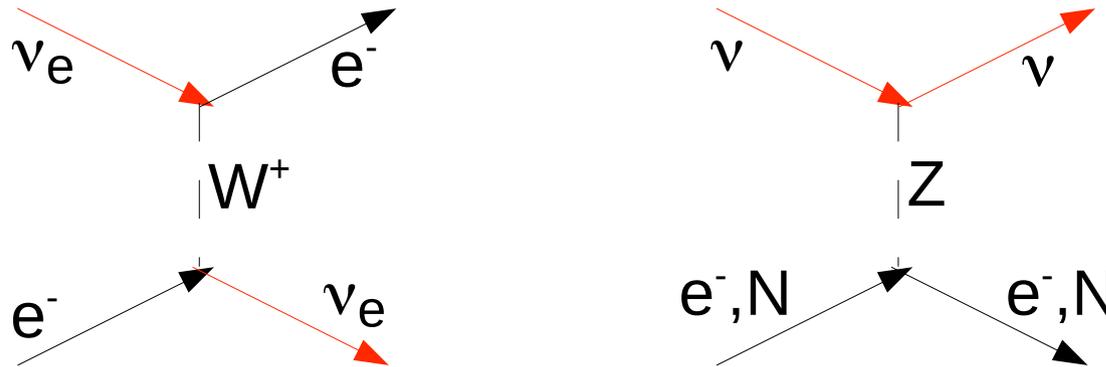
# Oscillazioni nella materia

Negli esperimenti di oscillazione tra la sorgente e il rivelatore i neutrini si propagano nella materia per distanze molto grandi. Nel caso dei neutrini solari la densità la materia attraversata è molto densa.

Le interazioni dei neutrini nella materia modificano la probabilità di oscillazione.

# Effetto MSW

- Nella materia la propagazione dei neutrini è alterata dallo scattering elastico in avanti. Se l'effetto fosse lo stesso per tutti i sapori, non ci sarebbe un effetto sulle oscillazioni:



- Tutti i neutrini hanno interazioni elastiche di corrente neutra mentre i neutrini elettronici hanno anche interazioni elastiche di corrente carica con gli elettroni del mezzo attraversato.

vuoto  $|\nu(t)\rangle = e^{i(px-Et)} |\nu\rangle \simeq e^{-im^2t/2E} |\nu\rangle$

materia  $|\nu(t)\rangle = e^{i(np_x-Et)} |\nu\rangle \simeq e^{-im^2t/2E + \sqrt{2}G_F n_e} |\nu\rangle$

“indice di rifrazione”  $n = 1 + V_W/p$

$$V_W = \sqrt{2}G_F n_e \approx 7.6 \cdot 10^{-14} \frac{Z}{A} \rho [\text{g/cm}^3] eV$$

$n_e$ : electron number density

# MSW per due famiglie

Nel formalismo hamiltoniano l'evoluzione dello stato di sapore per due famiglie nel vuoto è

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{bmatrix} = H_V \begin{bmatrix} \nu_e(0) \\ \nu_\mu(0) \end{bmatrix} \quad H |\nu_k\rangle \simeq \left(E + \frac{m_k^2}{2E}\right) |\nu_k\rangle$$

$$H_{vac} = U H U^\dagger = \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

↑  
proporzionale all'identità  
→ fase irrilevante per le oscillazioni

$H^\circ$

soluzione eq. secolare:

$$\tan 2\theta = \frac{2H_{21}}{H_{22} - H_{11}}$$

Aggiungendo il termine di materia:

$$\sqrt{2}G_F n_e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{equivalenti a meno di un termine proporzionale all'identità}$$

$$H_{mat} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

# La risonanza MSW

$$\begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Nella materia l'angolo di mescolamento diventa:

$$\tan 2\theta_M = \frac{2H_{21}}{H_{22} - H_{11}} = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m^2 \cos 2\theta - A}$$

$$A = 2\sqrt{2}G_F n_e E$$

$$\Delta m_M^2 = \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}$$

Per  $A = \Delta m^2 \cos 2\theta$  si ha  $\theta_M = \pi/4$  (cioè mescolamento massimo) anche per  $\theta$  piccoli (risonanza MSW)

$$n_e = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E} \approx 1.3 \cdot 10^{25} / \text{cm}^3 \approx 22 \text{g}/\text{cm}^3$$

Densità del nucleo solare:  
150 g/cm<sup>3</sup>

Per  $\theta = 32.5^\circ$ ,  $\Delta m^2 = 8 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ , e un neutrino di 10 MeV

$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$