

Corso di Fisica Nucleare e Subnucleare II (6cf)

Masse e
Oscillazioni dei Neutrini
Lezioni 5-6

Lucio Ludovici
18 maggio 2010

Lucio.Ludovici@roma1.infn.it

Calendario Lezioni Oscillazioni

Lezione

Data

Orario

Aula

1-2 Martedì 11 maggio

3-4 Mercoledì 12 maggio

5-6 Martedì 18 maggio

7-8 Giovedì 20 maggio

11-13

13-15

11-13

11-13

Aula 3

Aula 4

Aula 3

Aula 3



Programma lezioni 3-4

1. Proprietà della probabilità di oscillazione.
2. Violazione di CP leptonica.
3. Caso limite di due famiglie. Formule approssimate: one mass dominance. Interpretazione del plot Δm^2 vs $\sin^2 2\theta$.
4. Oscillazioni nella materia, meccanismo MSW.

Alcune proprietà della probabilità di oscillazione

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta(*)} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}}$$

$$\triangleright \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{W}_{kj}^{\beta\alpha*} = \mathbf{W}_{jk}^{\alpha\beta*} = \mathbf{W}_{jk}^{\beta\alpha} \quad \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*$$

$$\triangleright \mathbf{U} \stackrel{CP}{\leftrightarrow} \mathbf{U}^* \quad \mathbf{U} \stackrel{CPT}{\leftrightarrow} \mathbf{U}^*$$

$$\nu \leftrightarrow \bar{\nu} \quad \nu \leftrightarrow \bar{\nu}$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta$$

$$\triangleright \text{La probabilità è invariante sotto CPT: } \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}} \equiv \mathcal{P}_{\bar{\nu}_{\beta} \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha}}$$

$$\text{inoltre: } \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}} \equiv \mathcal{P}_{\bar{\nu}_{\alpha} \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha}} \quad \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}} \equiv 1 - \sum_{\beta \neq \alpha} \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}} \quad \text{prob. di sopravvivenza}$$

\triangleright Per $\delta = 0$ ($\mathbf{U}_{\alpha k}$ reali) la probabilità è invariante sotto CP:

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k}^2 \mathbf{U}_{\beta k}^2 + 2 \sum_{k>j} \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j} \cos \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right)$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right)$$

Altre forme della probabilità di oscillazione

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta(*)} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}}$$

Separando i contributi della parte reale e immaginaria di $\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}$ si evidenziano le parti CP-pari e CP-dispari

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2 \sum_{k>j} \Re\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \cos\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) + 2 \sum_{k>j} \Im\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E}\right) + 2 \sum_{k>j} \Im\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)$$

Asimmetria di CP, violazione di CP leptonica

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = \frac{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}}{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} + \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}}$$

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = \frac{2 \sum_{k>j} \Im\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)}{\delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E}\right)}$$

Invariante di Jarsholg $J_{\alpha\beta;kj} = \Im\{\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*\} = \pm \mathbf{J}$

Analogo all'area dei triangoli unitari in CKM: $\mathbf{J}^{\text{CKM}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= c_{12} s_{12} c_{23} s_{23} c_{13}^2 s_{13} \sin \delta = \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \theta_{13} \sin \delta \\ &= \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \theta_{13} \sin \delta \approx 0.23 \sin \theta_{13} \sin \delta \\ &\quad \approx 0.9 \quad \approx 1 \quad \approx 1 \end{aligned}$$

La possibilità di misurare ~~CP~~L è legata al valore di θ_{13}

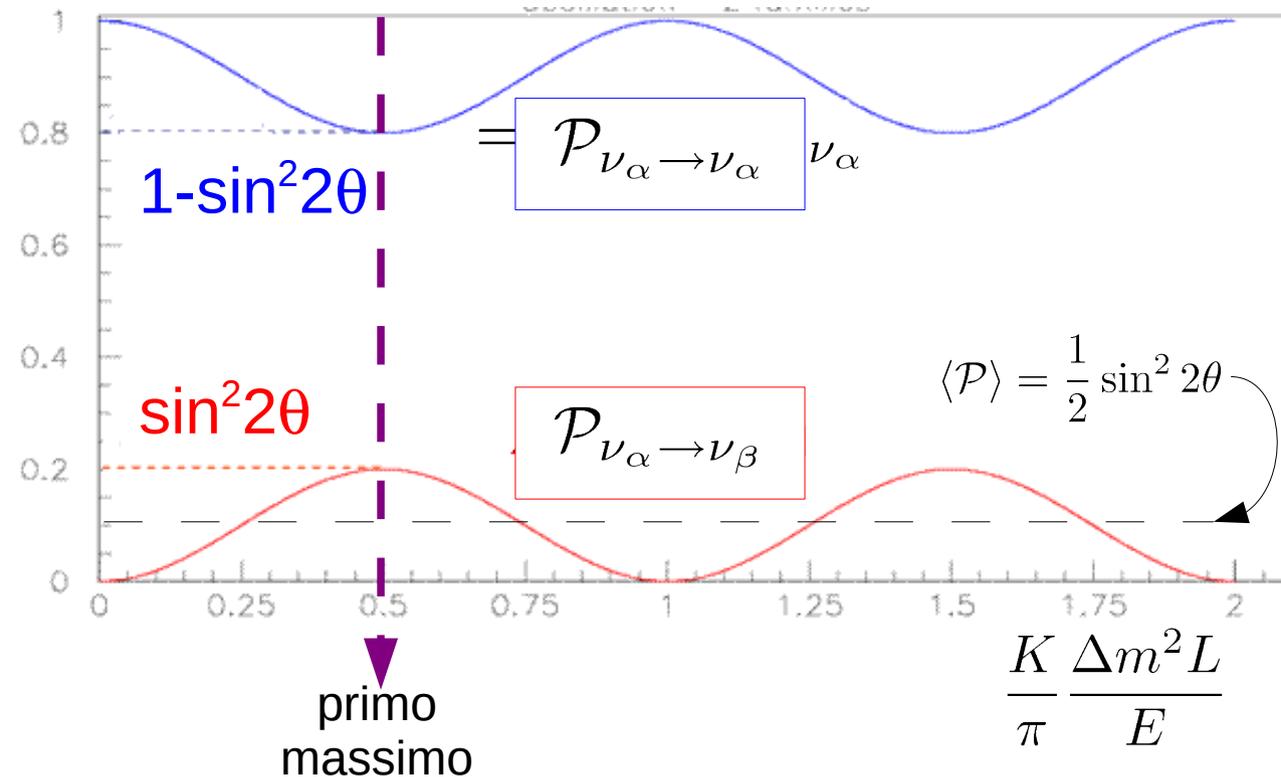
Probabilità di oscillazione a 2 famiglie

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$$

Importante storicamente e nella pratica degli esperimenti di oscillazione
 Approssimazione delle formule generali valida in molti casi

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m^2 L}{4E} &= \frac{1}{\hbar c} \frac{\Delta m^2 L}{4E} = K \frac{\Delta m^2 L}{E} \\ &\simeq 1.27 \frac{\Delta m^2 [eV^2] L [Km]}{E [GeV]} \end{aligned}$$



ESEMPIO

Il primo massimo di oscillazione
 con $\Delta m^2 = 2 \cdot 10^{-3} eV^2$
 $E = 1 \text{ GeV}$

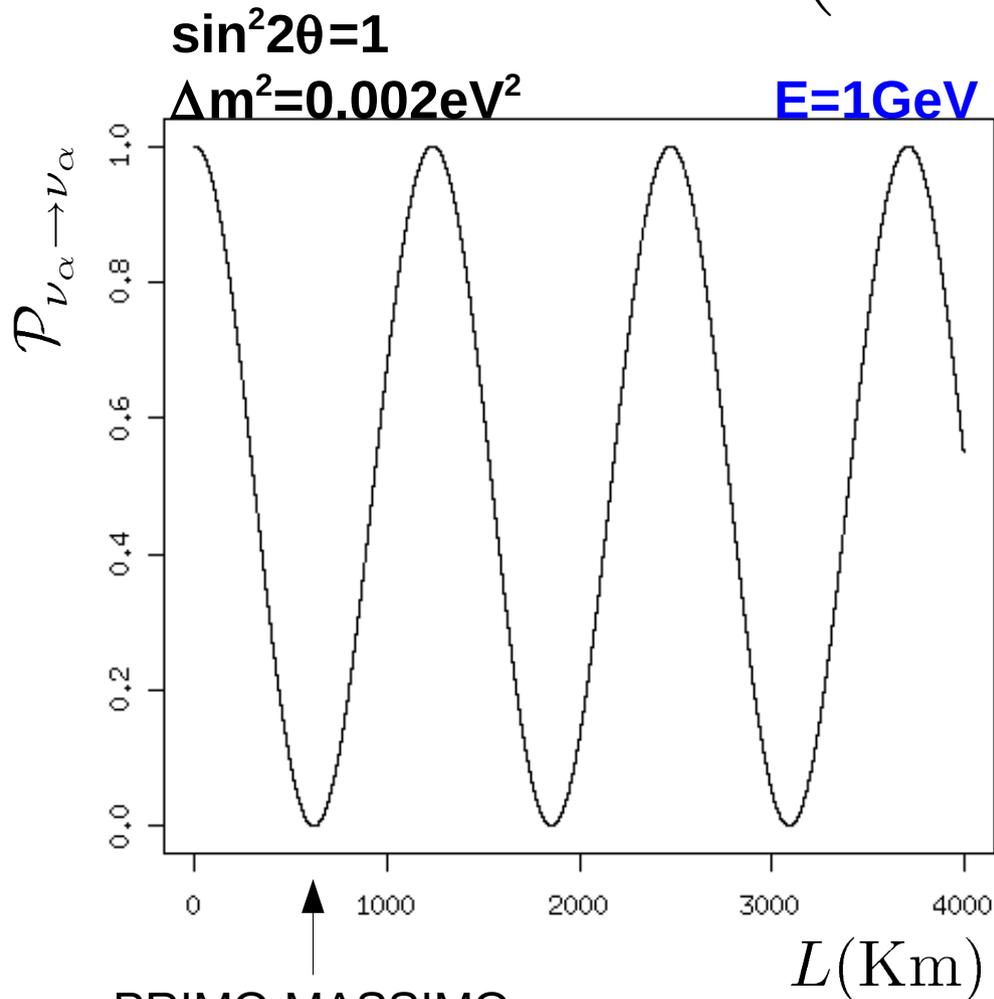
si ha per

$$L = \frac{\pi}{2} \frac{E [GeV]}{1.27 \Delta m^2 [eV^2]} = 618 \text{ Km}$$

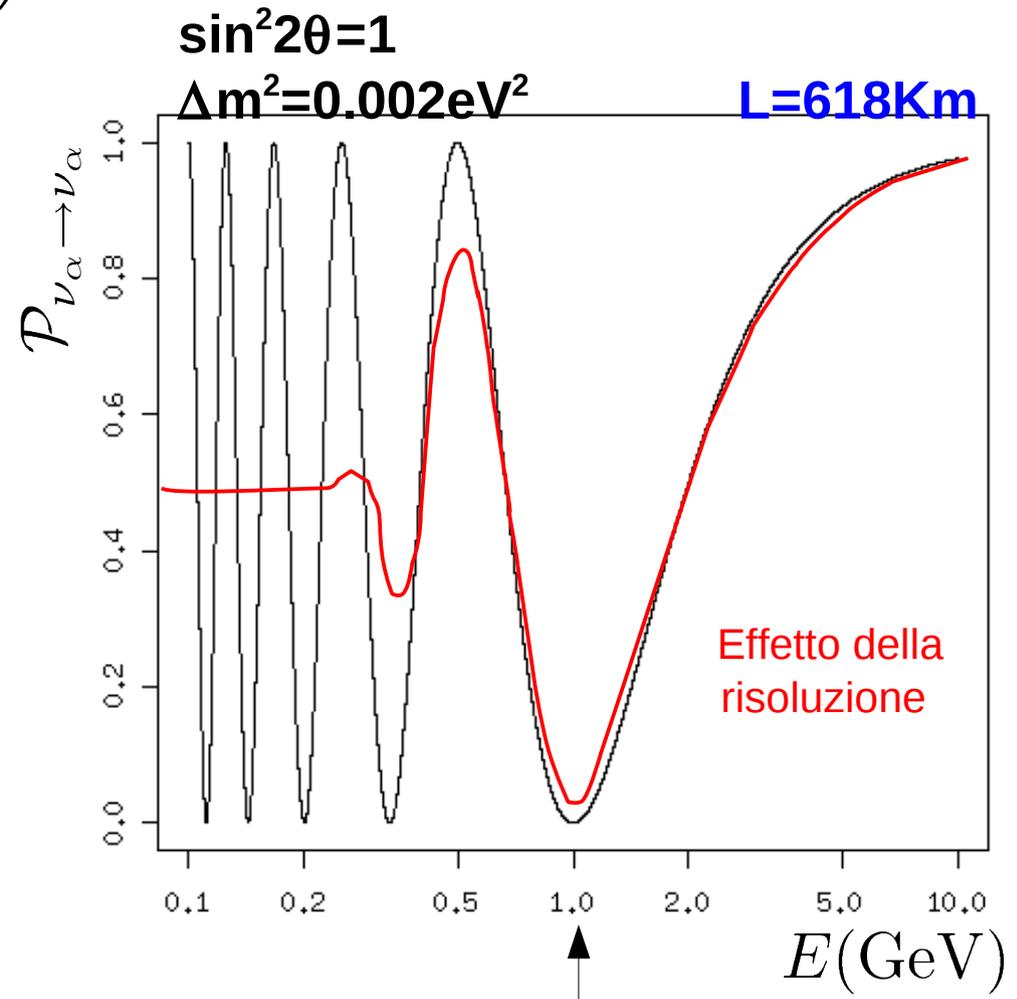
Dipendenza da L, E

Probabilità di sopravvivenza

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$



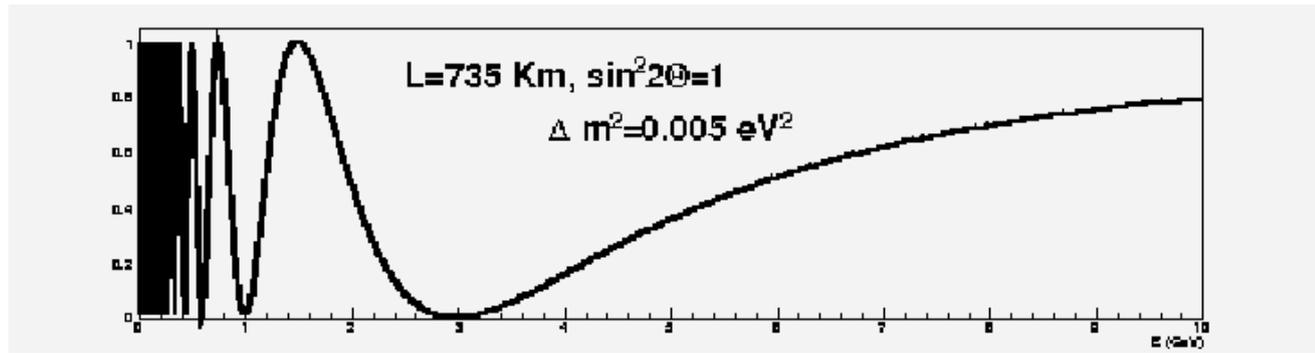
PRIMO MASSIMO
DI
OSCILLAZIONE



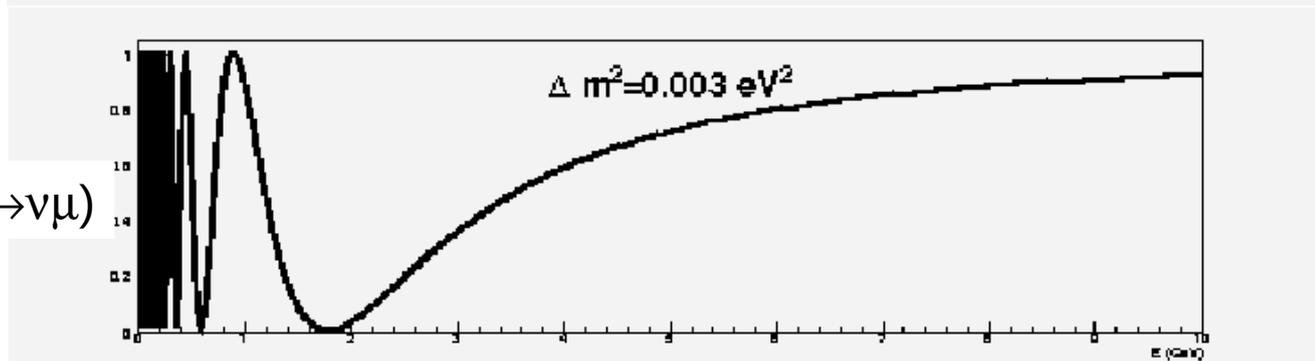
PRIMO MASSIMO
DI
OSCILLAZIONE

Dipendenza da E

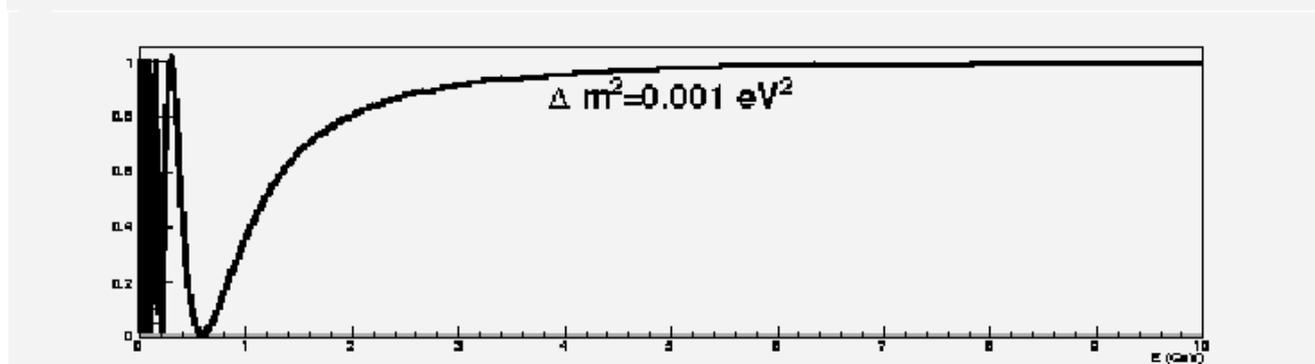
L=735 Km



$\sin^2 2\theta=1$
 $\Delta m^2=0.005 \text{ eV}^2$



$\sin^2 2\theta=1$
 $\Delta m^2=0.003 \text{ eV}^2$

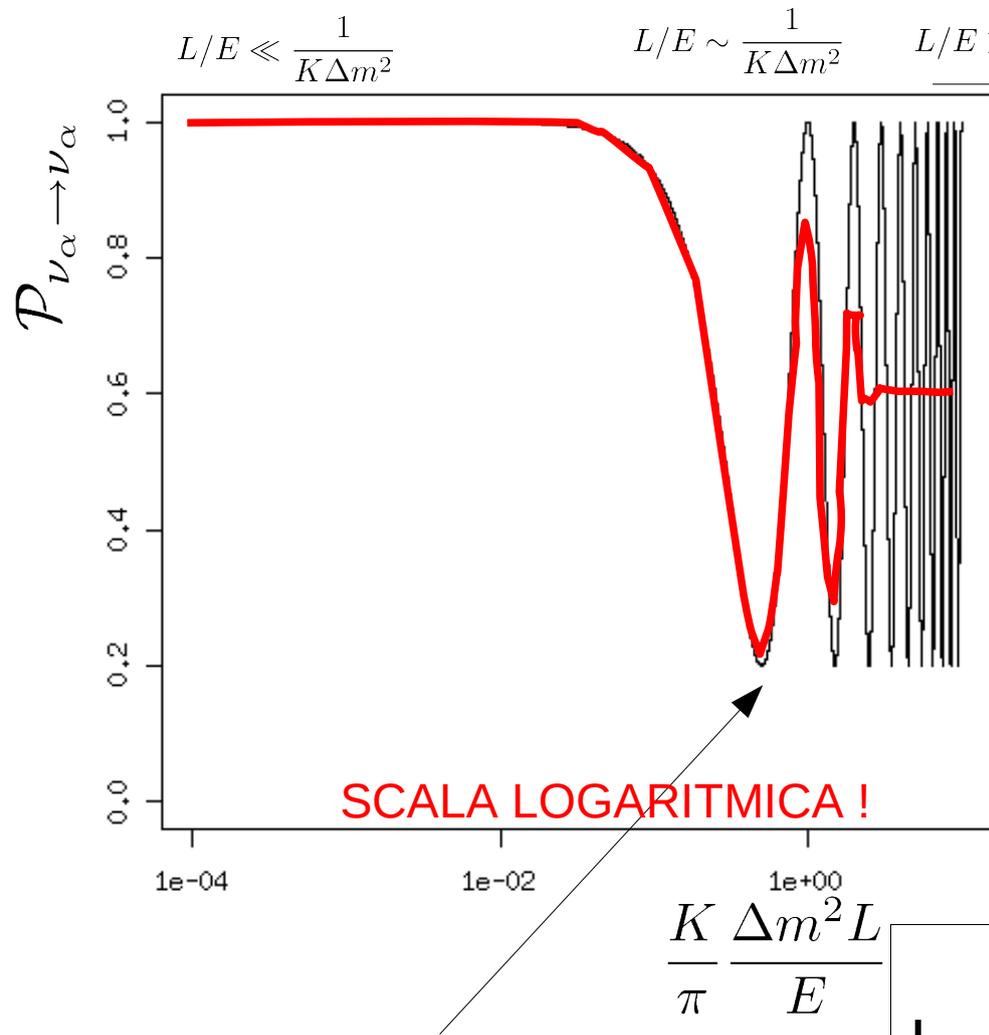


$\sin^2 2\theta=1$
 $\Delta m^2=0.001 \text{ eV}^2$

$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)$

E(GeV)

Sensibilità alle oscillazioni



$L/E \ll \frac{1}{K\Delta m^2}$ $L/E \sim \frac{1}{K\Delta m^2}$ $L/E \gg \frac{1}{K\Delta m^2}$

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$

- $L/E \ll \frac{1}{K\Delta m^2}$ le oscillazioni non hanno “tempo” di svilupparsi
- $L/E \approx \frac{1}{K\Delta m^2}$ massimo della sensibilità
- $L/E \gg \frac{1}{K\Delta m^2}$ la risoluzione impedisce di risolvere le oscillazioni:
→ si misura $\langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} \rangle$

Massimo della sensibilità

$$L/E = \frac{\pi}{2K\Delta m^2}$$

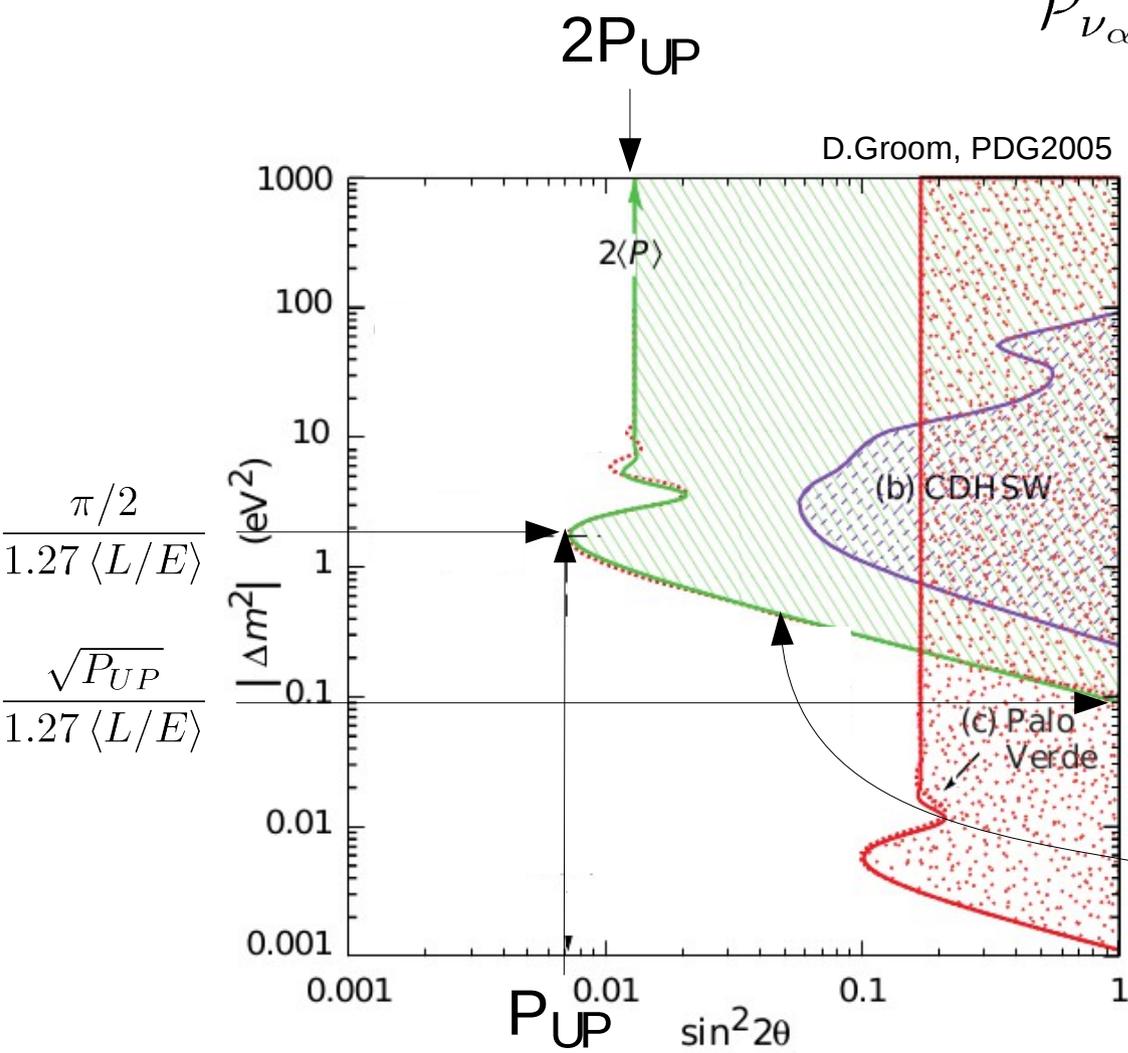
RISOLUZIONE L/E

L → sorgente estesa (atmosfera, sole, tunnel di decadimento,...)

E → misurata con $\Delta E/E$ o talvolta non misurata, sorgente con spettro esteso

Interpretazione del plot Δm^2 vs $\sin^2 2\theta$

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$



Ricerca negativa:
 $P < P_{UP}$ al 90%CL
 upper limit \rightarrow plot di esclusione

Ricerca positiva:
 $P_{MIN} < P (< P_{MAX})$ al 90%CL
 scoperta \rightarrow plot di inclusione

\rightarrow Curve di iso-probabilità

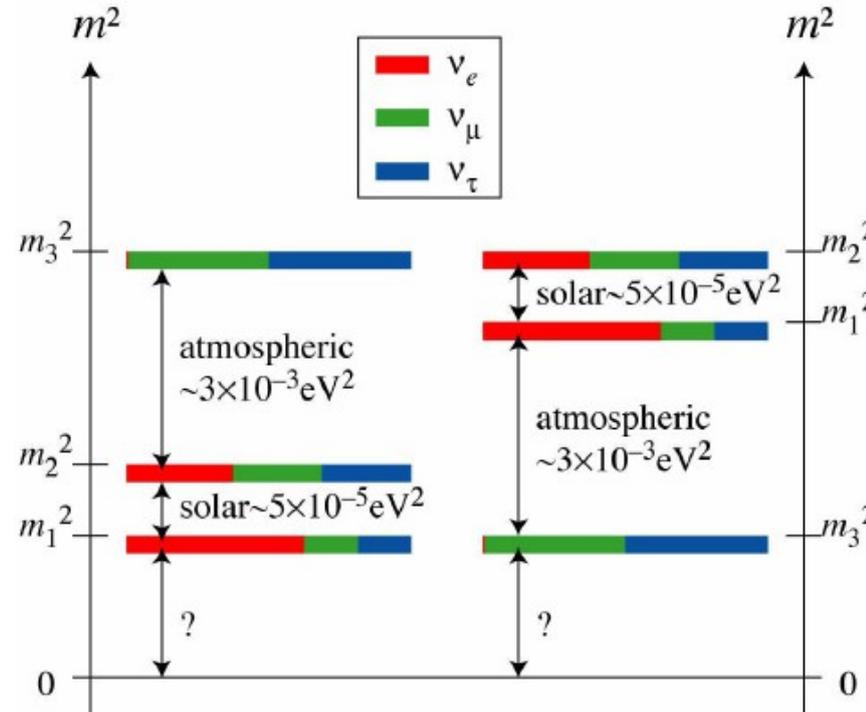
Per $\frac{\Delta m^2 L}{E} \ll 1$ $P < P_{UP}$ diventa
 $\sin^2 2\theta \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right)^2 < P_{UP}$

$$\Delta m^2 = \frac{\sqrt{P_{UP}}}{1.27 \langle L/E \rangle \sqrt{\sin^2 2\theta}}$$

Il caso semplificato di due neutrini come ci aiuta a interpretare la formula di oscillazione completa per tre famiglie ?

One mass-scale dominance: $\Delta m^2_{23} \gg \Delta m^2_{12}$

In molti casi, un esperimento con L/E vicino al massimo di sensibilità per un certo Δm^2 , ha un effetto costante (indipendente da L/E) dall'altro Δm^2



$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \simeq S_{\alpha\beta} \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right)$$

$$S_{\alpha\beta} = 4 \left| \sum \mathbf{U}_{\alpha i}^* \mathbf{U}_{\beta i} \right|^2$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} \simeq 1 - 4T_\alpha (1 - T_\alpha) \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right)$$

$$T_\alpha = \sum |\mathbf{U}_{\alpha i}|^2$$

Formule approssimate della stessa forma della formula di oscillazione per 2 neutrini

→ Parametri efficaci

Formule approssimate

Esperimenti a distanze terrestri, con $\Delta m_{12} L/E \ll 1$, sono descritti solo da 3 parametri: θ_{23} , Δm_{12} , θ_{13} e da formule simili a quelle per 2 famiglie:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \cong \sin^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23} = \sin^2 2\theta_{\mu e} \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \cong \cos^4\theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \Delta_{23} = \sin^2 2\theta_{\mu\tau} \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) \cong \cos^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23} = \sin^2 2\theta_{e\tau} \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \cong 1 - (\sin^2 2\theta_{\mu\tau} + \sin^2 2\theta_{\mu e}) \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \cong 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23}$$

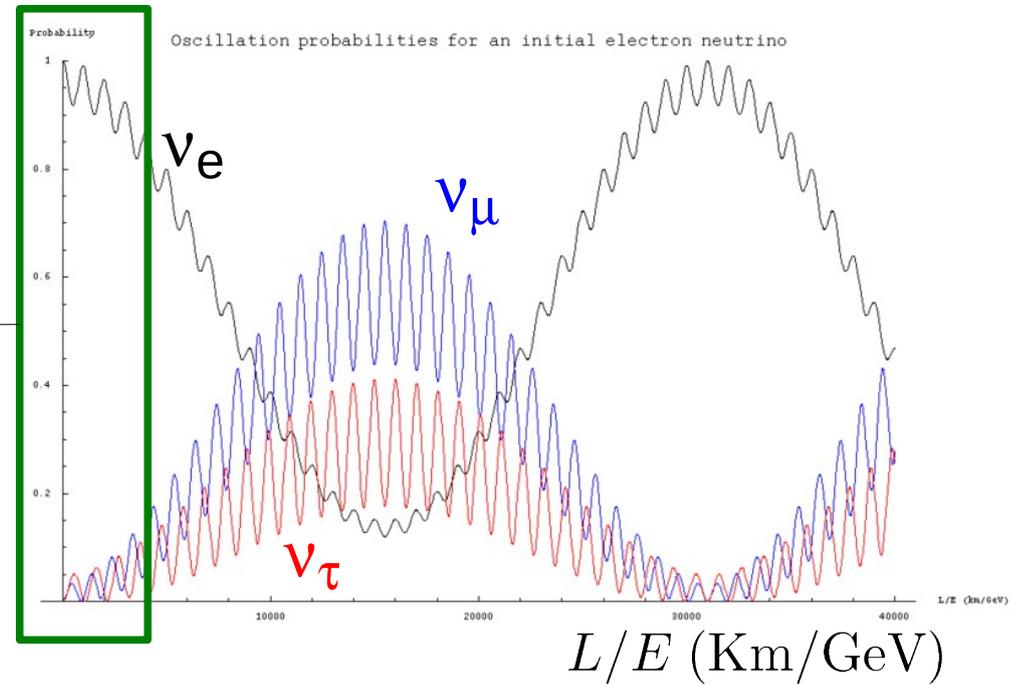
Angoli di mixing efficaci:

$$\sin^2 2\theta_{\mu e} = \sin^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \cong 0.5 \sin^2 2\theta_{13}$$

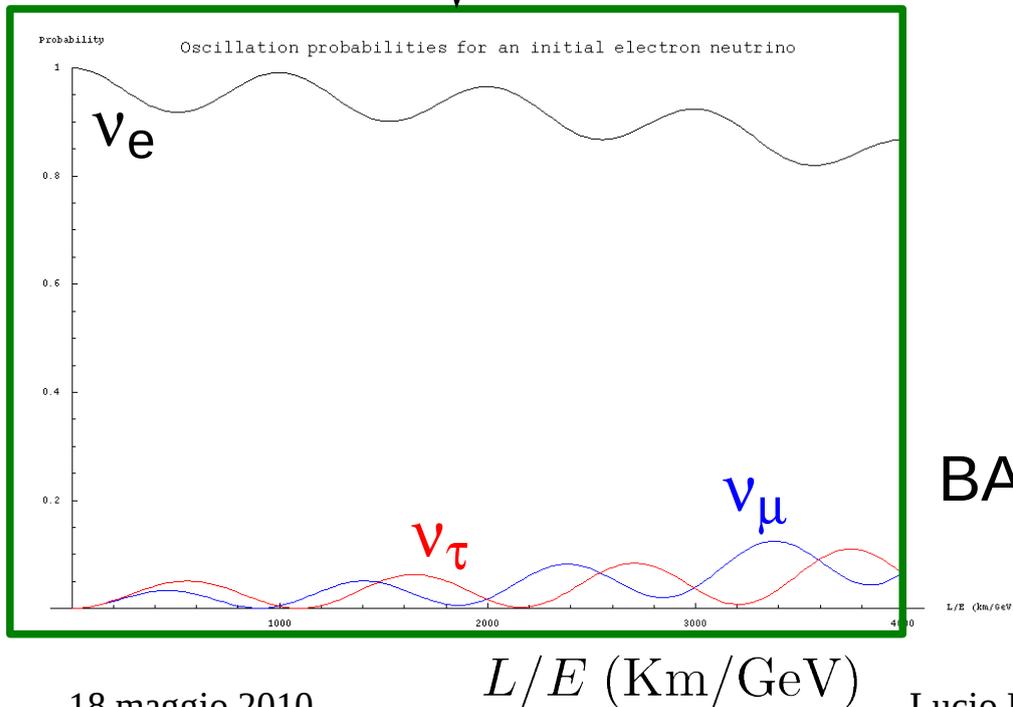
$$\sin^2 2\theta_{\mu\tau} = \cos^4\theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \cong \sin^2 2\theta_{23}$$

$$\sin^2 2\theta_{e\tau} = \cos^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \cong 0.5 \sin^2 2\theta_{13}$$

Probabilità di oscillazione ν_e

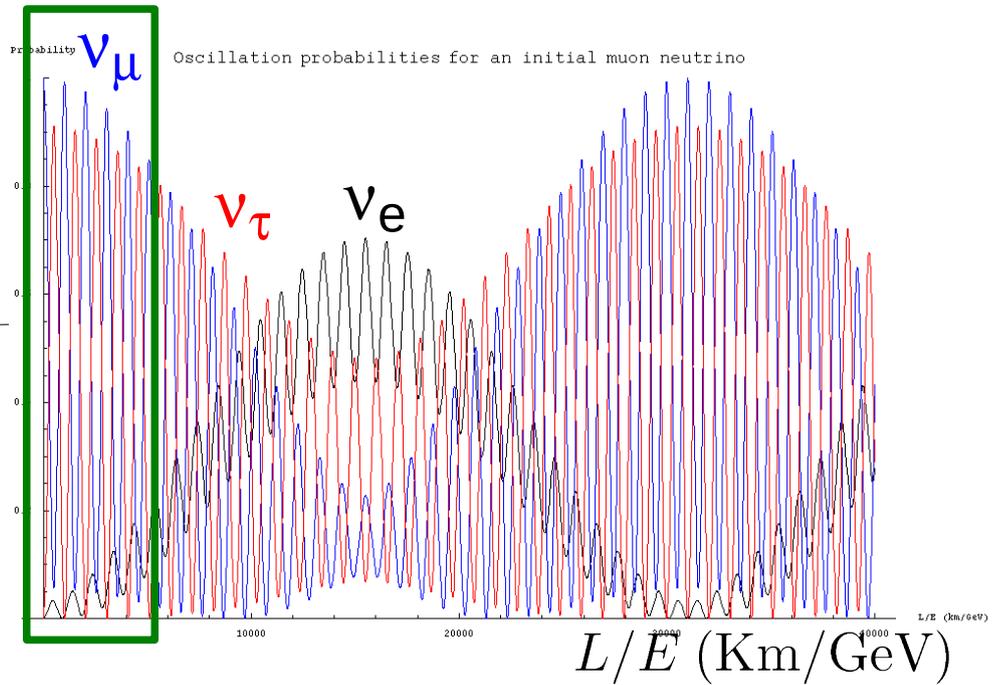


BASELINE LUNGA

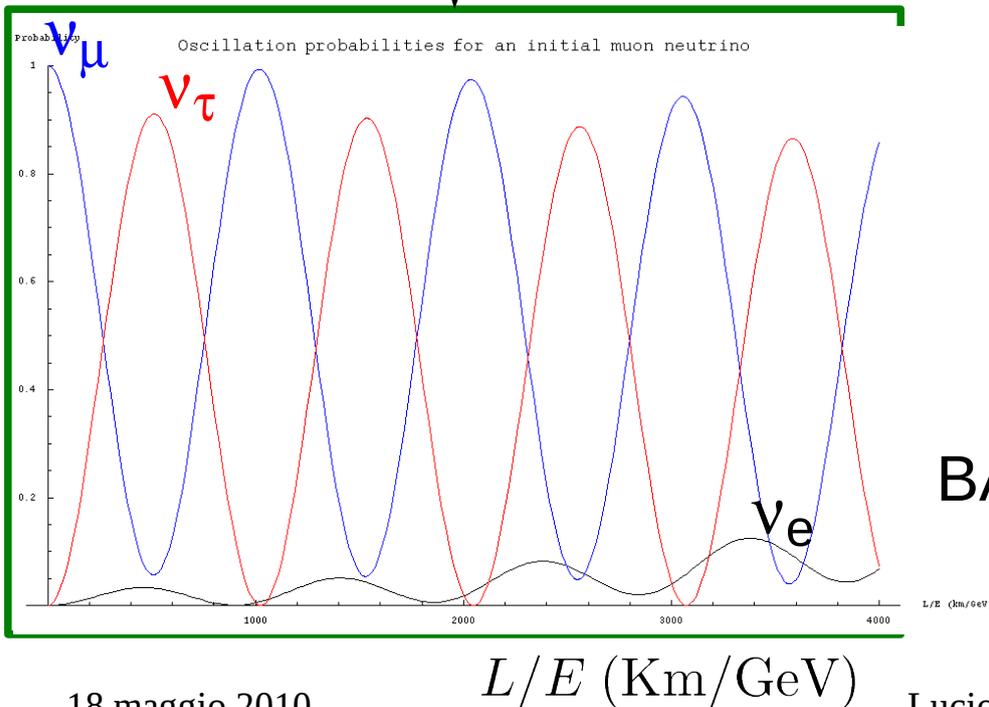


BASELINE CORTA

Probabilità di oscillazione ν_μ

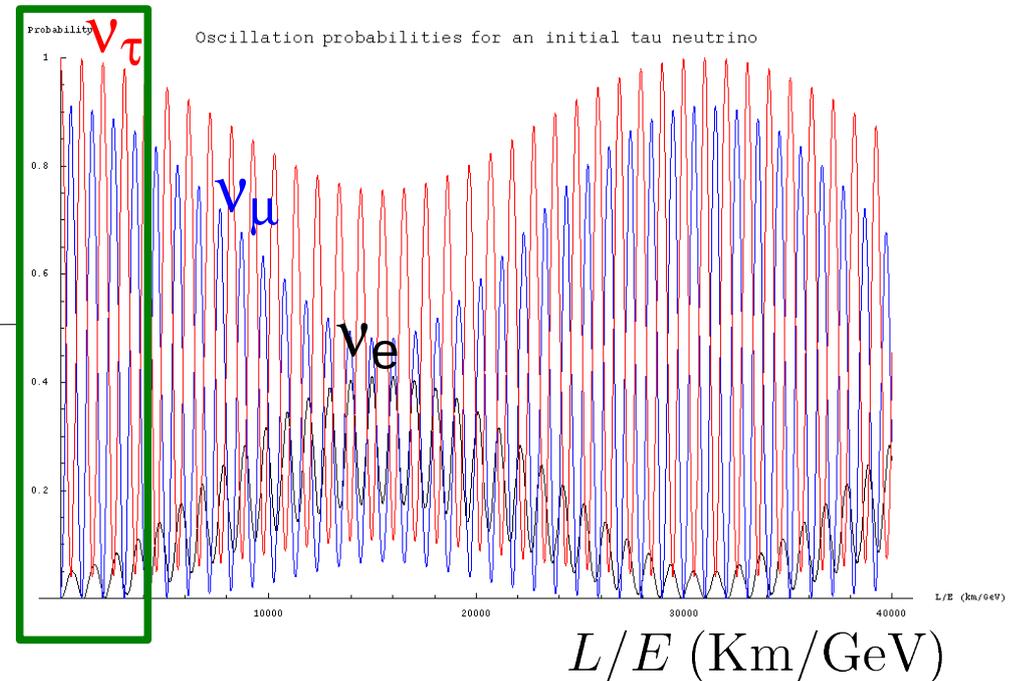


BASELINE LUNGA

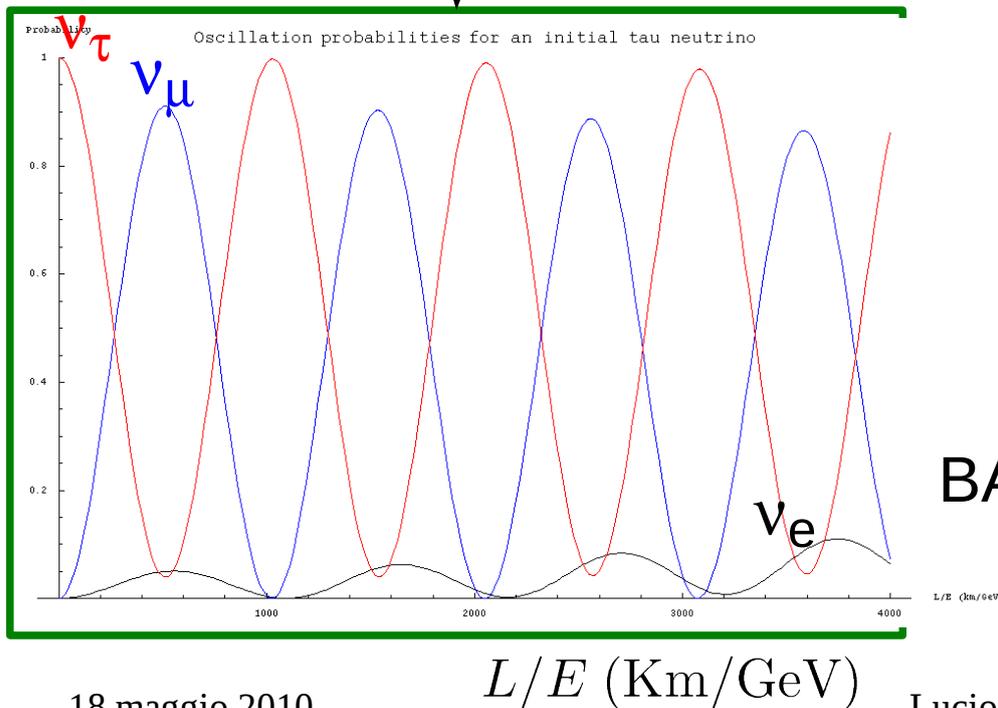


BASELINE CORTA

Probabilità di oscillazione ν_τ



BASELINE LUNGA



BASELINE CORTA

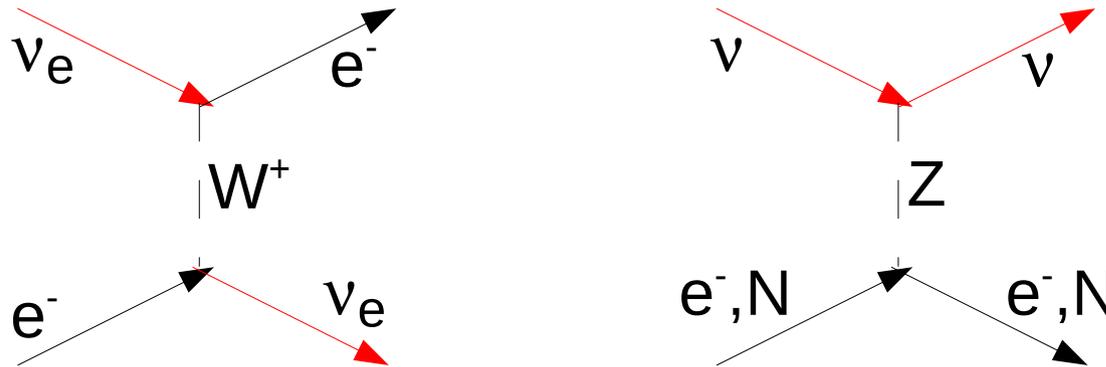
Oscillazioni nella materia

Negli esperimenti di oscillazione tra la sorgente e il rivelatore i neutrini si propagano nella materia per distanze molto grandi. Nel caso dei neutrini solari la densità la materia attraversata è molto densa.

Le interazioni dei neutrini nella materia modificano la probabilità di oscillazione.

Effetto MSW

➤ Nella materia la propagazione dei neutrini è alterata dallo scattering elastico in avanti. Se l'effetto fosse lo stesso per tutti i sapori, non ci sarebbe un risultato sulle oscillazioni:



➤ Tutti i neutrini hanno interazioni elastiche di corrente neutra mentre i neutrini elettronici hanno anche interazioni elastiche di corrente carica con gli elettroni del mezzo attraversato.

vuoto $|\nu(t)\rangle = e^{i(px-Et)} |\nu\rangle \simeq e^{-im^2 t/2E} |\nu\rangle$

materia $|\nu(t)\rangle = e^{i(np_x - Et)} |\nu\rangle \simeq e^{-im^2 t/2E + \sqrt{2}G_F n_e} |\nu\rangle$

“indice di rifrazione” $n = 1 + V_W/p$ $V_W = \sqrt{2}G_F n_e \approx 7.6 \cdot 10^{-14} \frac{Z}{A} \rho [\text{g/cm}^3] eV$

n_e : electron number density

MSW per due famiglie

Nel formalismo hamiltoniano l'evoluzione dello stato di sapore per due famiglie nel vuoto è

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{bmatrix} = H_{vac} \begin{bmatrix} \nu_e(0) \\ \nu_\mu(0) \end{bmatrix} \quad H |\nu_k\rangle \simeq \left(E + \frac{m_k^2}{2E} \right) |\nu_k\rangle$$

$$H_{vac} = U H U^\dagger = \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Rotazione R_θ \uparrow \uparrow H°

proporzionale all'identità
→ fase irrilevante per le oscillazioni

soluzione eq. secolare:

$$\tan 2\theta = \frac{2H_{21}}{H_{22} - H_{11}}$$

Aggiungendo il termine di materia:

$$\sqrt{2}G_F n_e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{equivalenti a meno di un termine proporzionale all'identità}$$

$$H_{mat} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La risonanza MSW

$$\begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Nella materia l'angolo di mescolamento diventa:

$$\tan 2\theta_M = \frac{2H_{21}}{H_{22} - H_{11}} = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m^2 \cos 2\theta - A}$$

$$A = 2\sqrt{2}G_F n_e E$$

$$\Delta m_M^2 = \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}$$

Per $A = \Delta m^2 \cos 2\theta$ si ha $\theta_M = \pi/4$ (cioè mescolamento massimo) anche per θ piccoli (risonanza MSW)

$$n_e = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E} \approx 1.3 \cdot 10^{25} / \text{cm}^3 \approx 22 \text{g}/\text{cm}^3$$

Densità del nucleo solare:
150 g/cm³

Per $\theta = 32.5^\circ$, $\Delta m^2 = 8 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$, e un neutrino di 10 MeV

$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{g}$$