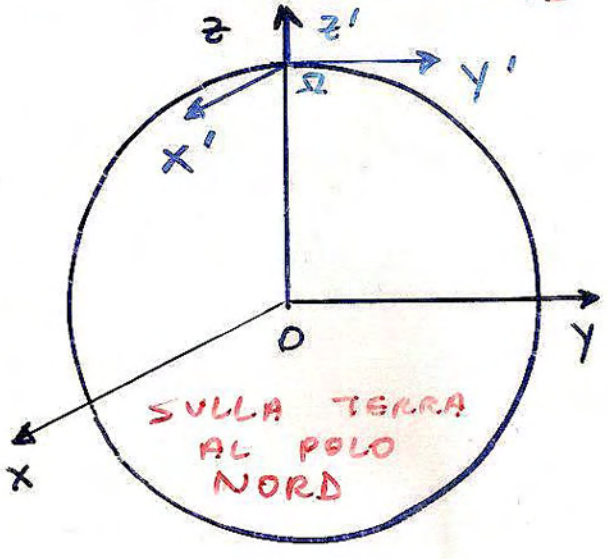
Un cosmonauta sbarca sulla Luna in corrispondenza dell'equatore Lunare. Dire in quale verso e con quale velocità $|\vec{v}_0|$ deve lanciare un sasso tangenzialmente all'equatore lunare affinché l'accelerazione subita dal sasso sia la stessa che gli competerebbe se lasciato cadere al polo Nord della Terra.

R_L = raggio della Luna = 1740 Km

ω_L = vel. angolare " " = $2.7 \cdot 10^{-6}$ rad/s

$g_L = \frac{1}{6} g$



Abbiamo visto che se

$\vec{a}$ = acc. nel sist. di rif. assoluto

$\vec{a}'$ = acc nel sist di rif. relativo

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}_T - \vec{a}_C$$

con $$\vec{A}_T = \vec{a}_t + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\Omega P}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\Omega P}')$$

$\vec{a}_t$ = acc. dell'origine del sist di rif R' rispetto al riferimento inerziale

$\vec{\omega}$ = velocità angolare di rotazione di R'

$\vec{\Omega P}'$ distanza del punto dalla $\vec{r}$ nel sist di rif R'

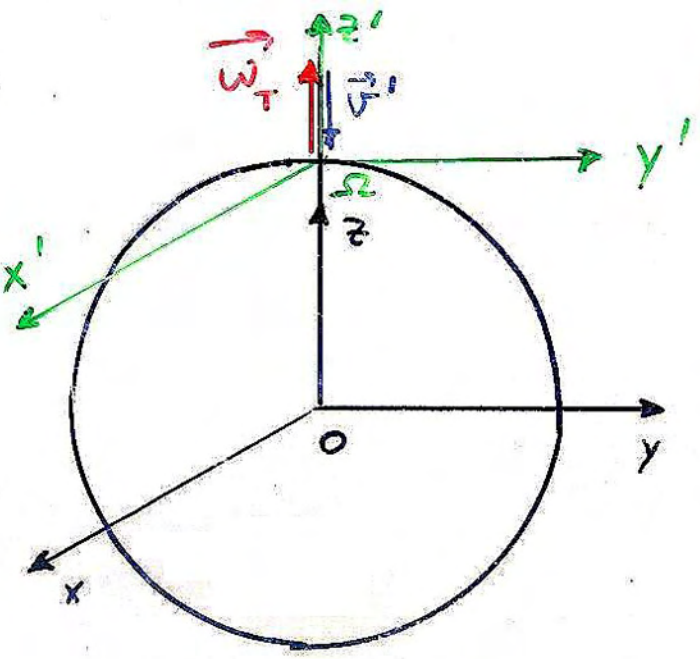
$\vec{a}_C$ = acc. di Coriolis = $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

$\vec{v}'$ velocità del punto nel sist R'

Al polo Nord quindi

il corpo che cade con velocità $\vec{v}'$ verticale è tale che

$$\vec{a}_c = 2\vec{w} \times \vec{v}' = 0$$



inoltre

$\vec{a}_t$ = acc. del punto Ω in Oxyz $= 0$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = 0$$

$$\vec{\Omega P'} \parallel \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} \times \vec{\Omega P'} = 0$$

quindi: al polo NORD $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}_T - \vec{a}_c$

$\vec{a}' = \vec{a} = \vec{g}$

- - - -

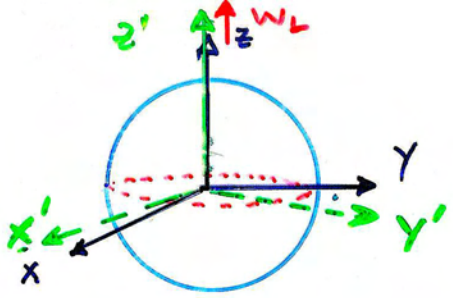
Vogliamo quindi che l'osservatore posto sulla sup. Lunare (all'equatore Lunare) veda il corpo, lanciato a vel. $\vec{v}'_0$ ad esempio, soggetto alla acc. di gravità terrestre.

Sulla Luna:

sistema R' con $\Omega \equiv 0$

$z' \equiv z$

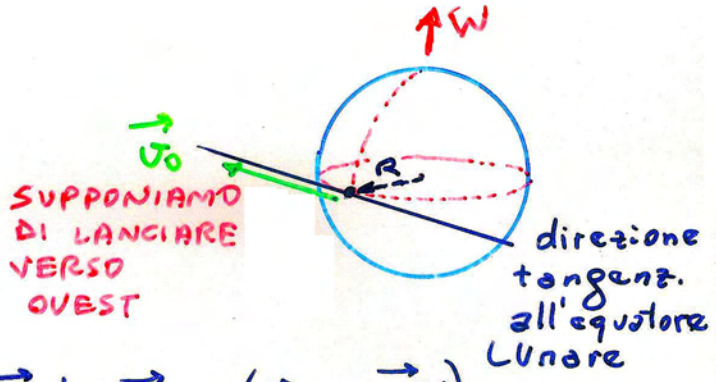
x', y' in rotazione



Vogliamo che $\vec{a}' = \vec{g}_T$

ma $\vec{a}'_L = \vec{a}_L - \vec{A}_{T_L} - \vec{a}_{c_L}$

con al solito

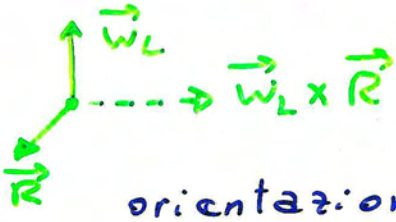


- $\vec{A}_{T_L} = \vec{a}_{t_L} + \frac{d\vec{\omega}_L}{dt} \times \vec{\Omega P'} + \vec{\omega}_L \times (\vec{\omega}_L \times \vec{\Omega P'})$

  $\vec{a}_{t_L} = 0$; $\frac{d\vec{\omega}_L}{dt} = 0$; $\vec{\Omega P'} = \vec{R}$

$\Rightarrow \vec{A}_{T_L} = \vec{\omega}_L \times (\vec{\omega}_L \times \vec{\Omega P'}) = \vec{\omega}_L \times (\vec{\omega}_L \times \vec{R})$

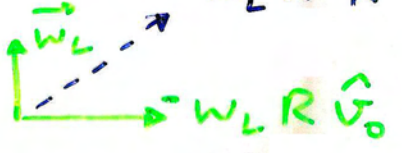
ma $\vec{\omega}_L \times \vec{R}$



da un vettore opposto alla orientazione scelta per $\vec{v}_0$

$\vec{\omega}_L \times \vec{R} = -\omega_L R \, \hat{v}_0$

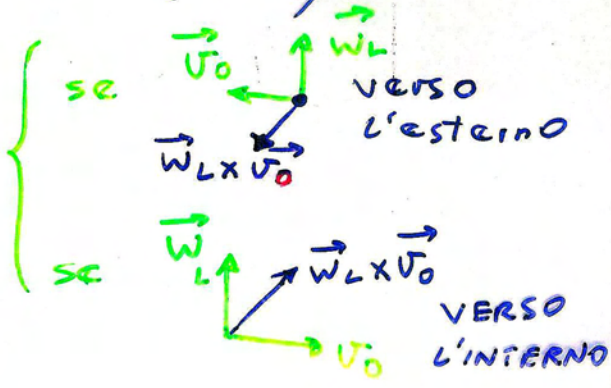
e $\vec{\omega}_L \times (-\omega_L R \, \hat{v}_0) = -\omega_L^2 R \hat{R}$



ricordiamo $\vec{\omega}_L$ diretta verso l'asse z (e z')

- $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_L \times \vec{v}_0$

  $= \pm 2 \omega_L v_0 \hat{R}$



Il segno dipende dal verso di $\vec{v}_0$!

visto che $g_L < g_T$ e che

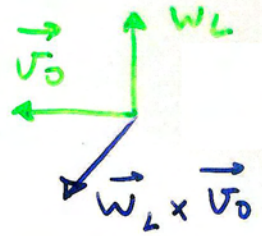
$$\vec{a}'_L = \vec{a}_L - \vec{A}_{T_L} - \vec{a}_{c_L} =$$

$$= \vec{g}_L - \left(-\omega_L^2 R\,\hat{R}\right) - \left(\pm 2\omega_L v_0\,\hat{R}\right)$$

$$= -g_L\hat{R} + \omega_L^2 R\,\hat{R} \mp 2\omega_L v_0\,\hat{R}$$

diretta verso l'esterno (opposto a $\vec{g}_L$)

v_0 dovrà essere tale che $2\vec{\omega}_L \times \vec{v}_0$ sia orientato come $\vec{R}$ e $-2\omega_L v_0 \hat{R}$ concorda con $-g_L\hat{R}$.



Proiettando tutto su $\vec{R}$ abbiamo

$$|a'| = |-g_L + \omega_L^2 R - 2\omega_L v_0| = g_T \leftarrow \text{richiesto dal problema}$$

$$2 v_0 \omega_L + \frac{1}{6} g_T - \omega_L^2 R = g_T$$

$$v_0 = \frac{g_T\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \omega_L^2 R}{2\omega_L} = 1.51 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

verso ovest