Corso Meccanica - Anno Accademico 2018/19

Esonero del 06/06/2019

Nome e Cognome	Canale	Compito

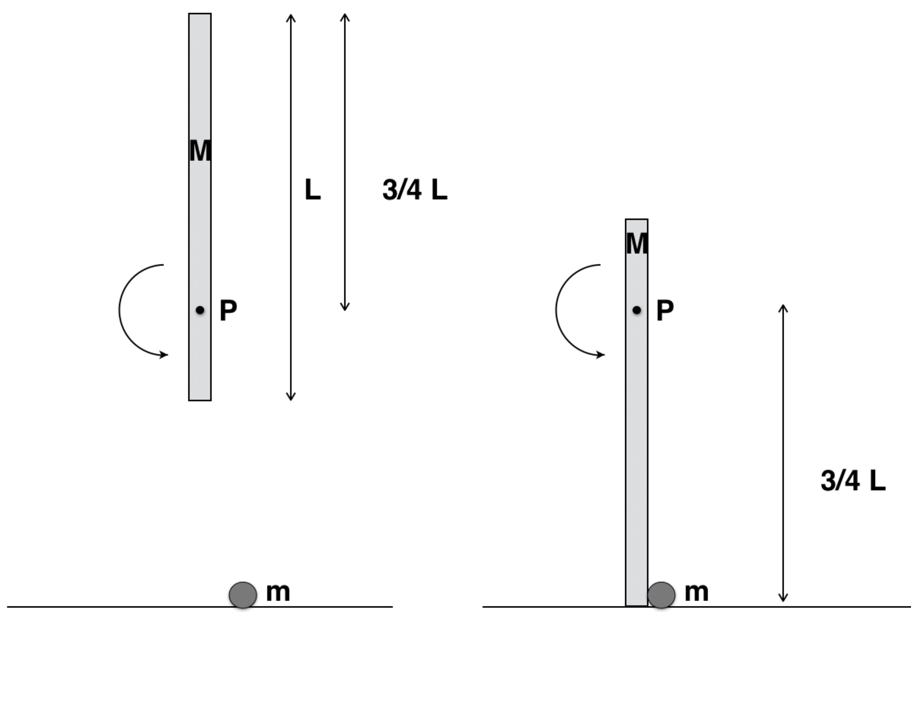
Esercizio 1

Una sbarretta omogenea di massa M ruota senza attrito su un piano verticale intorno ad un perno fisso in P posto ad una distanza $\frac{3}{4}L$ da un estremo di essa, con L lunghezza totale della sbarretta. Nell'istante iniziale essa è posta nella posizione di equilibrio instabile mostrata in figura a sinistra, ruotata quindi di un angolo π rispetto alla posizione di riposo. A causa di una piccola perturbazione la sbarretta esce dalla posizione di equilibrio instabile e comincia a ruotare in senso antiorario attorno al perno P. Quando la sbarretta giunge nella posizione $\theta = 0$, come mostrato nella figura di destra, urta una pallina di dimensioni trascurabili e massa m ferma sotto il perno, ad una distanza $\frac{3}{4}L$ da esso. Dopo l'urto la pallina rimane attacata alla sbarretta.

Calcolare:

1. la velocità angolare della sbarretta subito prima dell'urto
2. la velocità della pallina dopo l'urto
3. l'impulso trasmesso dalla pallina alla sbarretta
4. l'angolo di ampiezza massima (θ_{max}) che raggiunge il sistema sbarretta+pallina dopo l'urto
5. le componenti della reazione vincolare in P nella direzione della sbarretta e nella direzione ortogonale a questa in corrispondenza di θ_{max}.

[FILA A: Dati numerici: $M = 1.5$ Kg, $L = 1.2$ m, $m = 500$ g]
[FILA B: Dati numerici: $M = 1.8$ Kg, $L = 0.8$ m, $m = 600$ g]



Esercizio 2 - Fila A

Un cilindro pieno di massa M e raggio R è tenuto sospeso con asse orizzontale tramite un perno P passante per il suo asse. Il cilindro è libero di muoversi con attrito trascurabile attorno al perno. A lato del cilindro una pannello verticale viene spinto orizzontalmente contro il cilindro da una molla ideale che fornisce una forza elastica $\vec{F}_{\text{el}}$. All'asse del cilindro è applicata una carrucola di massa trascurabile e raggio r, solidale al cilindro, su cui è avvolta una fune ideale a cui è appesa una massa m come in figura. Tra il pannello verticale e il cilindro vi è attrito con coefficienti statico μ_s e dinamico μ_d.

1. Si ricavi il valore massimo m_0 della massa m affinché il sistema non si muova.

2. Si calcoli la reazione vincolare del perno sul cilindro assumendo $m = m_0$.

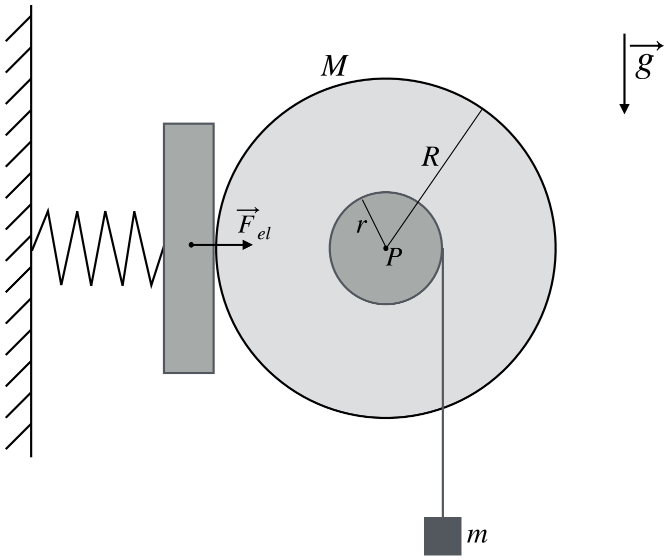
Si assuma adesso che $m = 2m_0$. Si determini:

3. l'accelerazione della massa m;

4. la reazione vincolare del perno sul cilindro durante il moto;

5. il lavoro della forza di attrito dopo che la massa m è scesa di una quota d.

[Dati numerici: $M = 5.0\text{kg}$, $R = 12.0\text{cm}$, $r = 3.0\text{cm}$, $F_{\text{el}} = 10\text{N}$, $\mu_s = 0.30$, $\mu_d = 0.20$, $d = 1.0\text{m}$]



Esercizio 2 - Fila B

Un cilindro pieno di massa M e raggio R è tenuto sospeso con asse orizzontale tramite un perno fisso in P passante per il suo asse. Il cilindro è libero di muoversi con attrito trascurabile attorno al perno. A lato del cilindro una pannello verticale viene spinto orizzontalmente contro il cilindro da una molla ideale che fornisce una forza elastica $\vec{F}_{\text{el}}$. All'asse del cilindro è applicata una carrucola di massa trascurabile e raggio r, solidale al cilindro, su cui è avvolta una fune ideale a cui è appesa una massa m come in figura. Tra il pannello verticale e il cilindro vi è attrito con coefficienti statico μ_s e dinamico μ_d.

1. Si ricavi il valore massimo m_0 della massa m affinché il sistema non si muova.

2. Si calcoli la reazione vincolare del perno sul cilindro assumendo $m = m_0$.

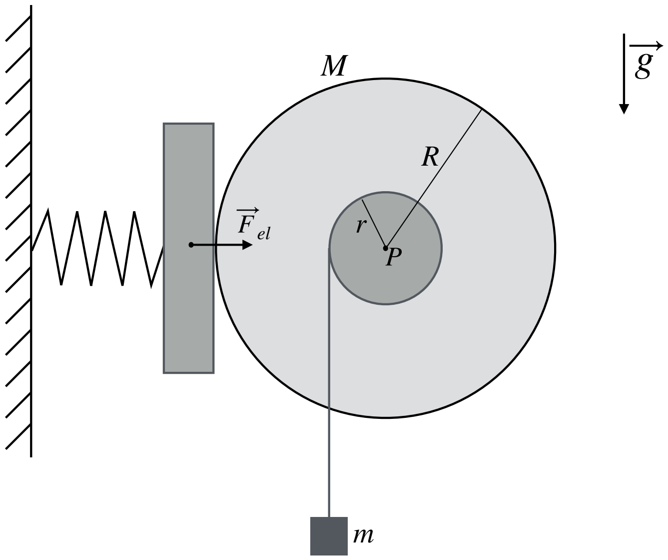
Si assuma adesso che $m = 2m_0$. Si determini:

3. l'accelerazione della massa m;

4. la reazione vincolare del perno sul cilindro durante il moto;

5. il lavoro della forza di attrito dopo che la massa m è scesa di una quota b.

[Dati numerici: $M = 8.0\text{kg}$, $R = 16.0\text{cm}$, $r = 4.0\text{cm}$, $F_{\text{el}} = 15\text{N}$, $\mu_s = 0.20$, $\mu_d = 0.10$, $b = 1.5\text{m}$]



Soluzioni Esercizio 1

1. La velocità della sbarretta prima dell'urto si calcola con la conservazione dell'energia mecanica, poichè l'unica forza esterna che compie lavoro è la forza peso:

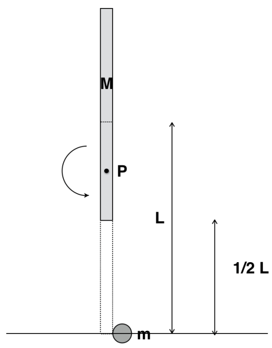
$$Mgh_i = Mgh_f + \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

Il centro di massa della sbarretta si trova ad una distanza L/2 dall'estremità della stessa e quindi per le quote del CM (rispetto al piano orizzontale su cui è poggiata m) valgono:

$$h_i = L$$

e

$$h_f = L/2$$



da cui si ricava:

$$MgL = Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2} I_P \omega_i^2$$
$$Mg\frac{L}{2} = +\frac{1}{2} I_P \omega_i^2$$
$$\rightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{MgL}{I_P}}$$

Calcolo del momento d'inerzia rispetto all'asse perpendicolare alla sbarretta passante per P:

$$I_P = I_{CM} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{16} = \frac{7ML^2}{48}$$

2. Nell'urto anelastico l'unica forza esterna è la reazione vincolare in P e il suo momento calcolato rispetto a P stesso è nullo. Pertanto nell'urto si conserva il momento angolare calcolato rispetto al polo P:

$$P_i = P_f$$
$$I_P \omega_i = I_{TOT} \omega_f$$

s

con I_{TOT} momento d'inerzia totale (sbarretta +pallina) rispetto al polo P:

$$I_{TOT} = I_P + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2$$

$$\omega_f = \frac{I_P \omega_i}{I_{TOT}}$$

Pertanto la velocità della pallina dopo l'urto sarà:

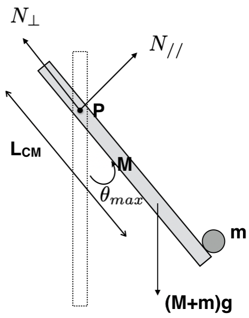
$$\rightarrow v_f = \omega_f \frac{3L}{4}$$

3. L'impulso trasferito dalla pallina alla sbarretta equivale, per il principio di azione e reazione, a quello trasferito dalla sbarretta alla pallina, ossia:

$$\rightarrow J_{sbarretta} = -J_{pallina} = -\Delta Q_{pallina} = -mv_f$$

4. La sbarretta è soggetta solo alla forza peso e alla reazione vincolare:

$$(M \vec{+} m)g + \vec{N} = (M + m)\vec{a}$$



Nella posizione di angolo massimo θ_{max} la velocità si annulla e quindi anche la componente centripeta dell'accelerazione:

$$\rightarrow \perp : N_\perp - (M + m)gcos\theta_{max} = 0$$

$$N_\perp = (M + m)gcos\theta_{max}$$

Il θ_{max} si ricava a partire dalla conservazione dell'energia meccanica rispetto all'istante subito dopo l'urto in cui la sbarretta si trova ancora in posizione verticale (NB. scelgo come origine $h = 0$ la quota di m nel momento dell'urto, come al punto 1)):

$$E_i = E_f$$

$$E_i = \frac{I_{TOT}\omega_f^2}{2} + \frac{MgL}{2}$$

$$E_f = Mg\left[\frac{L}{2} + \frac{L}{4}(1 - \cos\theta_{max})\right] + mg\left[\frac{3L}{4}(1 - \cos\theta_{max})\right]$$

Quindi:

$$\frac{I_{TOT}\omega_f^2}{2} + \frac{MgL}{2} = Mg\left[\frac{L}{2} + \frac{L}{4}(1 - \cos\theta_{max})\right] + mg\left[\frac{3L}{4}(1 - \cos\theta_{max})\right]$$

$$\frac{I_{TOT}\omega_f^2}{2} = (1 - \cos\theta_{max})\left[\frac{MgL}{4} + \frac{3mgL}{4}\right]$$

$$2I_{TOT}\omega_f^2 = (1 - \cos\theta_{max})\left[MgL + 3mgL\right]$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{2I_{TOT}\omega_f^2}{[MgL + 3mgL]}$$

Per quanto riguarda invece la componente tangenziale si ha:

$$\rightarrow // : -N_{//} + (M + m)gsin\theta_{max} = (M + m)a_{//}$$

$$N_{//} = (M + m)(gsin\theta_{max} - a_{//})$$

Calcolo $a_{//}$ tenendo conto che il CM compie un moto circolare attorno al punto P di raggio $L_{CM}-L/4$:

$$a_{//} = \frac{dv}{dt} = (L_{CM} - L/4)\frac{dw}{dt} = (L_{CM} - L/4)\dot{\omega}$$

con

$$L_{CM} = \frac{\frac{ML}{2} + mL}{M + m}$$

La velocità angolare con cui si muove il CM si può ricavare dalla seconda equazione cardinale per un polo sull'asse di rotazione P:

$$(M + m)g(L_{CM} - L/4)sin\theta_{max} = I_{TOT}\dot{\omega}$$
$$\dot{\omega} = \frac{(M + m)g(L_{CM} - L/4)sin\theta_{max}}{I_{TOT}}$$

Quindi:

$$N_{//} = (M + m)(gsin\theta_{max} - a_{//}) = (M + m)(gsin\theta_{max} - (L_{CM} - L/4)\dot{\omega})$$

Tabella 1. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
M [kg]	1.5	1.8
L [m]	1.2	0.8
m [kg]	0.5	0.6
g [ms^{-2}]	9.81	9.81
I_P [kg m^2]	0.316	0.168
ω_i [s^{-1}]	7.487	9.169
ω_f [s^{-1}]	3.276	4.012
v_f [ms^-1]	2.948	2.407
$J_{sbarretta}$ [Ns^{-1}]	-1.474	-1.444
I_{TOT} [kg m^2]	0.72	0.384
θ_{max} [rad]	0.973	0.973
$N_\perp$ [N]	11.0368	13.243
L_{CM} [m]	0.75	0.5
$\dot{\omega}$ [s^{-2}]	10.139	15.208
$a_{//}$ [ms^{-2}]	4.562	4.562
$N_{//}$ [N]	7.097	8.516
$\lvert\vec{N}\rvert$ [N]	13.121	15.745

Soluzioni Esercizio 2

1. Il momento delle forze sul cilindro rispetto al perno P è dato da

$$\tau_P = \pm\left[Rf_{\text{att}} - rT\right] \qquad + : \text{ fila A}, \quad - : \text{ fila B}$$

dove $T = mg$ è la tensione della fune. Siccome il sistema è in equilibrio, $\tau_P = 0$ da cui

$$f_{\text{att}} = \frac{r}{R}mg.$$

La condizione sull'attrito statico $|f_{\text{att}}| \leqslant \mu_s F_{\text{el}}$ porta a

$$m \leqslant m_0 \equiv \frac{\mu_s R F_{\text{el}}}{rg} = 1.2\text{kg}.$$

2. Dalla prima equazione cardinale $\vec{F}_{\text{el}} + \vec{f}_{\text{att}} + M\vec{g} + \vec{T} + \vec{R} = 0$ si trova

$$\begin{aligned} R_x &= -F_{\text{el}} = -(10|15)\text{N} \\ R_y &= g\left[M + m_0\left(1 \pm \frac{r}{R}\right)\right] = (64|87)\text{N}. \end{aligned}$$

3. Siccome il sistema è in movimento, l'attrito dinamico vale $|f_{\text{att}}| = \mu_d F_{\text{el}}$, diretto verso il basso per la fila A e verso l'alto per la fila B. Definendo a il modulo dell'accelerazione della massa m, abbiamo che il modulo della tensione della fune è $T = m(g-a)$. Il momento delle forze sul cilindro rispetto alla posizione del perno adesso è

$$\begin{aligned} \tau_P &= \pm\left[Rf_{\text{att}} - rT\right] \\ &= \pm\left[R\mu_d F_{\text{el}} - rm(g-a)\right] \end{aligned}$$

che eguaglia la derivata del momento angolare del cilindro

$$\dot{L}_P = \mp I_C \frac{a}{r} = \mp \frac{MR^2 a}{2r}.$$

Risolvendo per a si trova

$$a = \frac{mgr^2 - rR\mu_d F_{\text{el}}}{MR^2/2 + mr^2} = \frac{(2\mu_s - \mu_d) rRF_{\text{el}}}{MR^2/2 + mr^2} = (0.38|0.27)\text{m/s}^2.$$

4. Dalla prima equazione cardinale $\vec{F}_{\text{el}} + \vec{f}_{\text{att}} + M\vec{g} + \vec{T} + \vec{R} = 0$ (identica a prima, eccetto che $\vec{f}_{\text{att}}$ e $\vec{T}$ sono diverse) si trova

$$\begin{aligned} R_x &= -F_{\text{el}} = -(10|15)\text{N} \\ R_y &= (M+m)g - ma \pm \mu_d F_{\text{el}} = -(74|100)\text{N}. \end{aligned}$$

5. Mentre la massa m scende di d (fila A, altrimenti b per fila B), il cilindro ha strisciato sul pannello per una lunghezza dR/r. Il lavoro della forza di attrito è quindi

$$W_{\text{att}} = -d\frac{R}{r}\mu_d F_{\text{el}} = -(8.0|9.0)\text{J}.$$

Alternativamente si può guardare l'energia meccanica persa, ma è più macchinoso (sebbene ovviamente porti al medesimo risultato).