Corso Meccanica - Anno Accademico 2018/19

Esame Scritto del 21/06/2019

Recupero primo esonero: es.1 e 2 in due ore;
Recupero secondo esonero: es. 3 e 4 in due ore;
Esame scritto completo: es. 2, 3, 4 in tre ore

Nome e Cognome	Canale	Compito

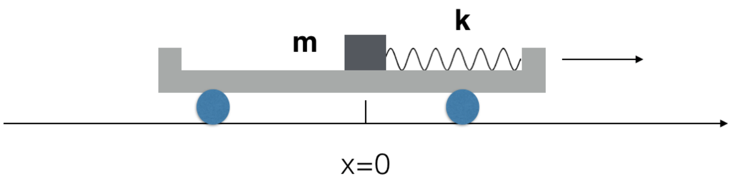
Esercizio 1

Un punto materiale di massa m appoggiato senza attrito sul piano orizzontale del vagone di un treno di massa $M \gg m$, è agganciato a una molla di costante elastica k, fissata all'altro estremo al vagone come mostrato in figura. Inizialmente il treno è fermo, con il punto materiale fermo al centro, nella posizione $x = 0$ rispetto al suolo, e la molla è alla sua lunghezza di riposo. A partire da un certo istante di tempo t_0, il treno accelera con accelerazione costante $\vec{A}$.

Calcolare

1. La forza apparente che agisce su m nel riferimento non inerziale solidale con il treno
2. L'allungamento massimo d della molla
3. La velocità del treno nell'istante di tempo in cui la molla è nella posizione di allungamento massimo
4. La legge oraria del punto materiale rispetto al suolo

[FILA A Dati numerici: $m = 95$ g, $k = 2.41$ N/m, $|\vec{A}| = 4.58$ m/s^2]
[FILA B Dati numerici: $m = 215$ g, $k = 3.56$ N/m, $|\vec{A}| = 7.57$ m/s^2]



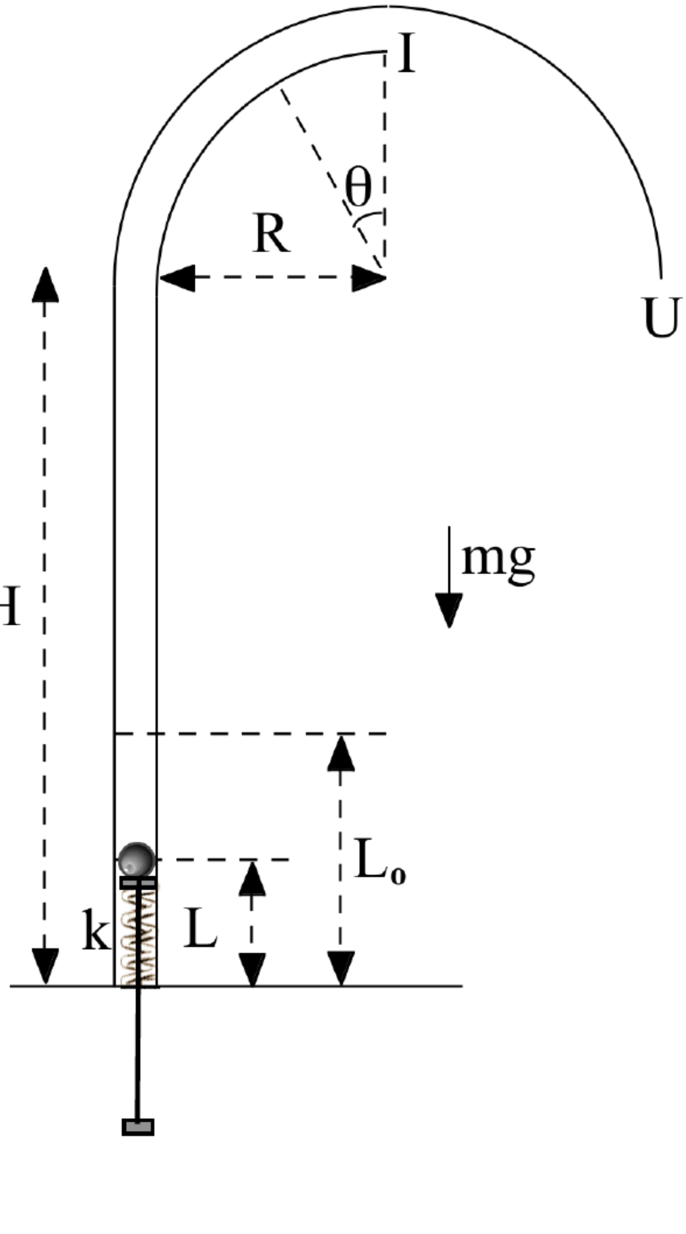
Esercizio 2

Una pallina di massa m è appoggiata ad una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo L_0, posta verticalmente, che un tirante di massa trascurabile mantiene compressa alla lunghezza $L < L_0$. La base della molla si trova all'imboccatura di un tubo fatto di un tratto verticale rettilineo di lunghezza H, seguito da un quarto di circonferenza di raggio R. Come indicato in figura, questo tubo si raccorda con una guida circolare anch'essa di raggio R. La sezione del tubo e il diametro della pallina sono trascurabili rispetto a tutte le altre lunghezze in gioco; inoltre tutto il percorso è privo di attrito.

All'istante iniziale il tirante che mantiene compressa la molla viene rilasciato. Determinare:

1. L_1, il massimo valore di L per il quale la pallina arriva al punto I del percorso (cioè all'apice del tratto semicircolare)
2. per $L = L_1$, l'angolo θ definito in figura per cui si annulla la reazione vincolare esercitata dal tubo
3. L_2, il massimo valore di L per il quale la pallina arriva al punto U del percorso
4. per $L = (L_1 + L_2)/2$, la distanza dalla molla alla quale la pallina tocca terra

[FILA A Dati numerici: $m = 20\text{g}$, $k = 1500\text{N/m}$, $L_0 = 10\text{cm}$ $H = 2.8\text{m}$, $R = 1\text{m}$]
[FILA B Dati numerici: $m = 15\text{g}$, $k = 1200\text{N/m}$, $L_0 = 8\text{cm}$ $H = 2.5\text{m}$, $R = 1.3\text{m}$]

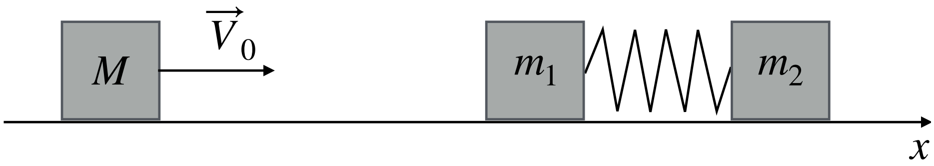


Esercizio 3

Un corpo di massa M scivola su un piano orizzontale con velocità V_0 diretta lungo l'asse x, come in figura. Ad un certo istante il corpo di massa M urta un corpo di massa m_1 a sua volta connesso, tramite una molla ideale di costante elastica k, ad un altro corpo di massa m_2, come illustrato in figura. Prima dell' urto le masse m_1 ed m_2 sono ferme e la loro distanza è pari alla lunghezza di riposo della molla. Si supponga trascurabile l' attrito tra i tre corpi e il piano orizzontale.

1. Si assuma che dopo l'urto la massa M rimanga attaccata alla massa m_1 e si calcoli:
   (a) la velocità del corpo M *immediatamente* dopo l'urto;
   (b) la velocità del centro di massa del sistema complessivo dei tre corpi dopo l'urto;
2. Si assuma invece che l'urto sia elastico e si calcoli:
   (a) la velocità del corpo M dopo l'urto;
   (b) la velocità del centro di massa dei corpi connessi da molla dopo l'urto;
   (c) la massima compressione della molla.

[FILA A Dati numerici: $V_0 = 0.23$ m/s, $M = 1.8$ kg, $m_1 = 0.9$ kg, $m_2 = 1.1$ kg, $k = 5.0$ N/m]
[FILA B Dati numerici: $V_0 = 0.31$ m/s, $M = 2.3$ kg, $m_1 = 0.7$ kg, $m_2 = 1$ kg, $k = 7.0$ N/m]



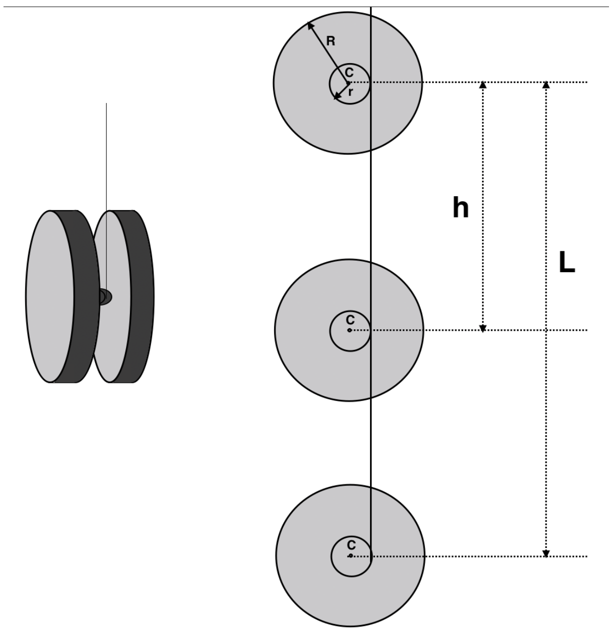
Esercizio 4

Un rocchetto è costituito da due dischi di raggio R e massa M uniti da un asse cilindrico di raggio r e massa m come mostrato in figura. Sull'asse del cilindro è avvolto per una lunghezza L un filo inestensibile e di massa trascurabile che ad un estremo è fissato sull'asse stesso. Mentre il rocchetto viene tenuto fermo, l'altro estremo del filo è connesso ad un vincolo in modo tale che il filo sia teso e verticale. Al tempo $t = 0$ il rocchetto viene lasciato libero di muoversi. Il rocchetto raggiungerà la quota più bassa quando l'intera lunghezza L del filo avvolto si sarà srotolata, poi continuando a ruotare risalirà mentre il filo si riavvolge sull'asse del cilindro. Si assuma la totale assenza di attrito.

Calcolare:

1. Il momento d'inerzia del rocchetto rispetto al punto di contatto del filo con il rocchetto
2. La legge del moto del centro di massa del rocchetto
3. La tensione del filo durante il moto di discesa
4. La velocità angolare del rocchetto quando la quota del centro di massa sarà diminuita di h
5. La tensione del filo durante il moto di salita

Si assuma che, essendo $r \ll R$ il filo rimanga sempre verticale in ogni fase del moto.
[Fila A Dati numerici: $M = 1.05$ kg, $m = 100$ g, $R = 75$ cm, $r = 2.5$ cm, $L = 300$ cm, $h = 220$ cm]
[Fila B Dati numerici: $M = 2.1$ kg, $m = 250$ g, $R = 95$ cm, $r = 3.5$ cm, $L = 500$ cm, $h = 310$ cm]



Soluzioni 1

1. Nel riferimento non inerziale la forza apparente è:

$$F_t = -mA$$

2. Quando l'allungamento della molla è massimo, la velocità del punto rispetto al carello è nulla, come nella condizione iniziale. Per il teorema delle forze vive, la variazione di energia meccanica è dovuta al lavoro delle forze apparenti:

$$1/2kd^2 = Amd$$

da cui si ottiene:

$$d = \frac{2mA}{k}$$

Allo stesso risultato si arriva ricavandosi la legge oraria $x'(t)$ del punto materiale rispetto al sistema del treno. Si assuma $x'(0) = 0$ e $\dot{x}'(0) = 0$. Per la l'equazione delle forze vale:

$$-kx' = m\ddot{x}' + mA$$

da cui si ottiene, considerando le condizioni iniziali di cui sopra:

$$x'(t) = \frac{mA}{k}cos(\omega t) - \frac{mA}{k}$$

$$\dot{x}'(t) = -\omega\frac{mA}{k}sin(\omega t)$$

Con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Il massimo allungamento si ha per $\dot{x}' = 0$ ossia per $t = T/2$ e vale dunque:

$$|x'(T/2)| = d = \frac{2mA}{k}$$

3. La velocità del treno rispetto al suolo si esprime come:

$$V(t) = V_0 + At = At$$

quindi:

$$V(T/2) = AT/2$$

4. La legge oraria del punto materiale rispetto al suolo è data da:

$$x(t) = x'(t) + X(t)$$

con $X(t)$ legge oraria del treno. Risulta dunque:

$$x(t) = \frac{mA}{k}cos(\omega t) - \frac{mA}{k} + \frac{1}{2}At^2$$

Tabella 1. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
m [kg]	0.095	0.215
k [N/m]	2.41	3.56
$\lvert\vec{A}_t\rvert$ [m/s^2]	4.58	7.57
$\lvert\vec{F}_t\rvert$ [N]	-0.435	-1.627
d [m]	0.361	0.914
ω [s^{-1}]	5.037	4.069
T [s]	1.249	1.546
V(T/2) [ms^{-1}]	2.861	5.852

Soluzioni 2

Lungo il percorso compiuto dalla pallina non c'è attrito, si conserva quindi l'energia meccanica totale.

1) Il valore massimo di L_1 (cioè la compressione minima della molla) tale che la pallina giunga in I corrisponde alla condizione che la pallina in I abbia energia cinetica nulla. Ovvero l'energia potenziale iniziale relativa alla forza elastica, $\frac{1}{2}k(L_0 - L_1)^2$, deve essere uguale alla variazione di energia potenziale gravitazionale della pallina, $mg(H + R) - mgL_1$:

$$\tfrac{1}{2}k(L_0 - L_1)^2 = mg(H + R - L_1)$$

Ponendo $\alpha = mg/k$ si ottengono per L_1 le soluzioni:

$$L_1^{(\pm)} = L_0 - \alpha \pm \alpha\sqrt{1 + 2(H + R - L)/\alpha}$$

La grandezza sotto radice è sicuramente positiva ($H > L$ per costruzione). I due risultati corrispondono ai due casi:

- $L_1^{(+)} = L_0 - \alpha + \alpha\sqrt{1 + 2(H + R - L)/\alpha} > L$ (molla elongata)
- $L_1^{(-)} = L_0 - \alpha - \alpha\sqrt{1 + 2(H + R - L)/\alpha} < L$ (molla compressa)

per cui $L_1^{(-)}$ corrisponde alla nostra soluzione.

2) Nel tratto di percorso semicircolare la pallina è soggetta alla forza peso e alla reazione del vincolo (diretta radialmente), ossia

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Nel primo quarto di circonferenza (fino ad I) la pallina è nel tubo e quindi necessariamente si muove di moto circolare. Questo significa che a reazione vincolare del tubo è tale da soddisfare

$$mg\cos\theta + N = mv_\theta^2/R$$

dove v_θ si ottiene dalla conservazione dell'energia

$$\tfrac{1}{2}k(L_0 - L_1)^2 = \tfrac{1}{2}mv_\theta^2 + mg(H + R\cos\theta - L_1)$$

o più semplicemente (rispetto al punto I)

$$\tfrac{1}{2}mv_\theta^2 = mgR(1 - \cos\theta)$$

da cui $v_\theta^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$. Si ottiene quindi

$$N = -mg\cos\theta + 2mg(1 - \cos\theta) = mg(2 - 3\cos\theta)$$

che si annulla per $\cos\theta = 2/3$, ovvero a $\theta_* = 48.2$ gradi (indipendentemente da qualsiasi dato del problema). Notare che

- per $\theta > \theta_*$ (tratto iniziale) si ha $\cos\theta < 2/3$ per cui N è centripeta
- per $\theta < \theta_*$ (tratto fino ad I) si ha $\cos\theta > 2/3$ per cui N è centrifuga (e permette alla pallina di arrivare in I).

3) Affinchè la pallina arrivi in U, è sufficiente che arrivi in I con una velocità tale da generare un accelerazione centrifuga pari alla forza peso (questo perchè da I in poi la reazione vincolare può essere solo centripeta). Quindi

$$mg = mv_I^2/R$$

e imponendo la conservazione dell'energia $\frac{1}{2}k(L_0 - L_2)^2 = mg(H + R - L_2) + \frac{1}{2}mv_I^2$ otteniamo

$$\tfrac{1}{2}k(L_0 - L_2)^2 = mg(H + \tfrac{3}{2}R - L_2)$$

Analogamente al punto 1), otteniamo per L_2 la soluzione della molla compressa

$$L_2^{(-)} = L - \alpha - \alpha\sqrt{1 + 2(H + \tfrac{3}{2}R - L)/\alpha}$$

4) Abbiamo $L_3 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$. Usando la conservazione dell'energia determiniamo la velocità in I:

$$v_I^2 = k(L_0 - L_3)^2/m - 2g(H + R - L_3)$$

In I la velocità è diretta orizzontalmente quindi la componente verticale è nulla. Il tempo di caduta è dunque $t_* = \sqrt{2(H + R)/g}$. Infine la distanza di caduta è $d = R + v_I t_*$

Tabella 2. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
m [g]	20	15
k [N/m]	1500	1200
L_0 [cm]	10	8
H [m]	2.8	2.5
R [m]	1.0	1.3
L_1 [cm]	6.88	4.97
θ_* [gradi]	48.2	48.2
L_2 [cm]	6.67	4.71
d [m]	2.91	3.49

Soluzioni 3

1. **Urto completamente anaelastico**

1a. Siccome il corpo M resta attaccato, definendo V la velocità immediatamente dopo l'urto si ha $MV_0 = (M + m_1)V$, da cui

$$V = \frac{M}{M + m_1}V_0 = (0.15|0.24)\text{m/s}.$$

1b. Nel sistema complessivo la quantità di moto è conservata in ogni istante, quindi

$$v_{\text{cm}} = \frac{M}{M + m_1 + m_2}V_0 = (0.11|0.17)\text{m/s}.$$

2. **Urto elastico**

2a. Definendo v_1 la velocità di m_1 immediatamente dopo l'urto e V quella di M si ha

$$\begin{cases} MV_0 = MV + m_1 v_1 \\ \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} V = \frac{M-m_1}{M+m_1} V_0 = (0.077|0.165)\text{m/s} \\ v_1 = \frac{2M}{M+m_1} V_0 = (0.317|0.475)\text{m/s}. \end{cases}$$

2b. La velocità del centro di massa del sistema m_1-m_2 si trova banalmente

$$v_{\text{cm}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2Mm_1}{(M + m_1)(m_1 + m_2)} V_0 = (0.14|0.19)\text{m/s}.$$

2c. L'energia meccanica del sistema m_1-m_2 immediatamente dopo l'urto, $E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$, si conserva durante il moto che segue. In generale l'energia sarà composta da un contributo traslazionale del centro di massa, un'energia cinetica interna, e l'energia potenziale della molla. La seconda è nulla nell'istante di compressione massima, per cui

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} k \delta^2$$

da cui la compressione massima δ è data da

$$\delta = v_1 \sqrt{\frac{\mu}{k}} = (0.099|0.11)\text{m}, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Soluzioni 4

1. Il momento d'Inerzia totale rispetto al punto di contatto vale:

$$I_0 = 2\left(\frac{MR^2}{2} + Mr^2\right) + \left(\frac{mr^2}{2} + mr^2\right) = 0.59 \text{ kg m}^2$$

2. Per calcolare la legge del moto del CM dobbiamo calcolare l'accelerazione con cui cade il rocchetto, la quale si ricava a partire dalle equazioni cardinali (NB si usa come centro dei momenti il punto di contatto del filo con il rocchetto ma equazioni analoghe si ricavano utilizzando il centro di rotazione sull'asse dle sistema):

$$\begin{cases} M_{tot}\vec{g} + \vec{\tau} = M_{tot}\vec{a} \\ \vec{OC} \times M_{tot}\vec{g} = I_o \dot{\omega} \hat{k} \end{cases}$$

con $M_{tot} = 2M + m$. Le equazioni proiettate lungo gli assi appropriati diventano:

$$\begin{cases} -M_{tot}g + \tau = -M_{tot}a \\ rM_{tot}g = I_o \dot{\omega} \\ a = \dot{\omega} r \end{cases}$$

Da cui si ricava:

$$a = \frac{gM_{tot}r^2}{I_0}$$

Il moto del CM è un moto uniformemente accelerato e, definendo $y = 0$ la quota più bassa raggiunta dal rocchetto durante il moto (ossia assumendo che la sua posizione iniziale sia ad una quota $h = L$ si ottiene:

$$y(t) = L - 1/2at^2$$

3. Durante la fase di discesa per la tensione vale:

$$\tau_d = M_{tot}(g - a)$$

4. Il rocchetto è sceso di una distanza h nel tempo:

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

In questa posizione il centro del disco avrà una velocità

$$v_h = at_h$$

e quindi la velocità angolare del rocchetto sarà:

$$\omega_h = v_h/r$$

Allo stesso risultato si arriva tramite la conservazione dell'energia meccanica:

$$\Delta U = M_{tot}gh$$

$$\Delta K = 1/2 M_{tot} v_h^2 + 1/2 I_C \, \omega_h^2 = 1/2(M_{tot}r^2 + I_C)\omega_h{}^2$$

con

$$I_C = 2\left(\frac{MR^2}{2}\right) + \left(\frac{mR^2}{2}\right)$$

5. Nel moto di risalita la dinamica è la stessa e quindi la tensione rimane invariata rispetto alla domanda 3.

Tabella 3. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
M [kg]	1.05	2.1
m [kg]	0.1	0.25
R [m]	0.75	0.95
r [m]	0.025	0.035
h [m]	2.2	3.1
L [m]	3	5
g [ms^{-2}]	9.81	9.81
M_{tot} [kg]	2.2	4.45
I_0 [kgm^2]	0.592	1.900
a [ms^{-2}]	0.0228	0.0281
τ_d [N]	21.532	43.529
t_h [s]	13.897	14.845
v_h [ms^{-1}]	0.317	0.417
ω_h [s^{-1}]	12.665	11.932
τ_s [N]	21.532	43.529