Corso Meccanica - Anno Accademico 2018/19

Esame Scritto del 21/06/2019 - Da svolgere in 3 ore

Nome e Cognome	Canale	Compito

Esercizio 1

Alla parete interna di un cilindro cavo di raggio R, ruotante attorno al proprio asse disposto verticalmente, è appoggiato un uomo di massa m (da considerare puntiforme ed inizialmente fermo rispetto al cilindro). Tra l'uomo e la parete esiste attrito di coefficienti statico e dinamico pari a μ_S e μ_D.

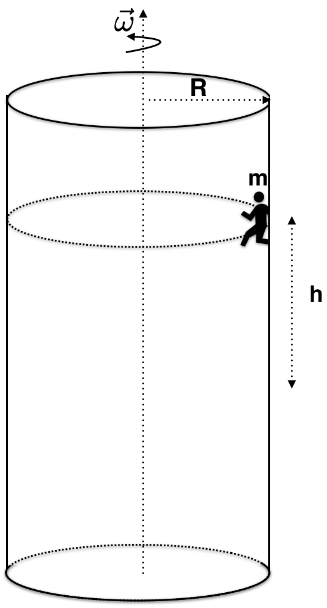
1. Determinare la minima velocità angolare ω_{min} con cui deve ruotare il cilindro affinchè l'uomo non cada, rimanendo in equilibrio quindi rispetto al cilindro stesso.

2. Se $\omega_1 = \frac{\omega_{min}}{2}$ calcolare l'accelerazione dell'uomo.

3. Calcolare la velocità dell'uomo rispetto al cilindro, dopo essere sceso di un tratto h.

4. Se nel momento in cui l'uomo è sceso di h, la velocità angolare del cilindro diventa istantaneamente pari a $\omega_2 = 2\omega_{min}$, determinare la legge oraria del moto dell'uomo.

[Dati Iniziali FILA A: $R = 1.2$ m, $m = 52$ kg , $h = 1.5$ m, $\mu_S = 0.8$, $\mu_D = 0.3$, $g = 9.81$ ms^{-2}]
[Dati Iniziali FILA B: $R = 1.5$ m, $m = 63$ kg , $h = 1.8$ m, $\mu_S = 0.9$, $\mu_D = 0.5$, $g = 9.81$ ms^{-2}]

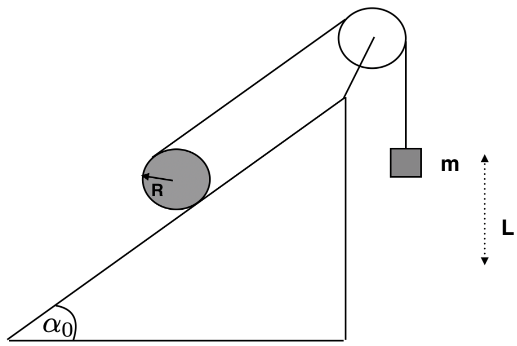


Esercizio 2

Un cilindro C di massa M e raggio R rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α_0. Al cilindro è avvolto un filo inestensibile e di massa trascurabile, connesso ad una massa m_0 tramite una puleggia come mostrato in figura. Si assuma inoltre che la massa della puleggia sia trascurabile e che il filo resti sempre parallelo al piano inclinato.

Nel caso il sistema sia in equilibrio si determini:

- La tensione del filo
- Il valore dell'angolo α_0.



Assumendo ora che la massa appesa valga $m = 2m_0$, con $\alpha = \alpha_0$ e con il sistema fermo all'istante $t_0 = 0$, si determini

- L'accelerazione del centro di massa del cilindro
- L'energia cinetica totale del sistema (cilindro +massa) dopo che la massa m è scesa di un tratto L.

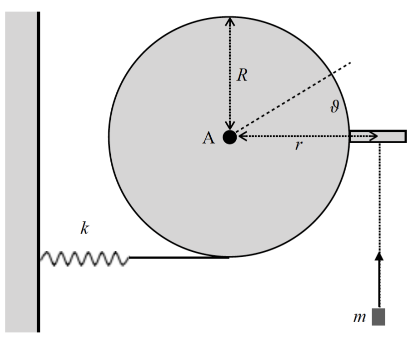
[Dati Iniziali FILA A: $m_0 = 0.9$ kg, $M = 3$ kg, $R = 0.5$ m, $L = 1.2$ m, $g = 9.81$ ms^{-2}]
[Dati Iniziali FILA B: $m_0 = 0.6$ kg, $M = 2.8$ kg, $R = 0.5$ m, $L = 1.4$ m, $g = 9.81$ ms^{-2}]

Esercizio 3

Un sistema rigido costituito da un disco di raggio R ed un' asta, è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito e incernierato in A, centro del disco. Il momento d' inerzia del sistema rispetto al polo A è I. Sul disco è avvolto un filo inestensibile di massa trascurabile, che connette il disco ad una molla di costante elastica k, vincolata ad una parete e inizialmente a riposo. L' asta e la molla sono inizialmente parallele, come mostrato in figura. L' asta viene colpita ad un istante $t = 0$ da un proiettile di massa m, che procede con velocità v in direzione perpendicolare all' asta, ad una distanza r da A. L'urto è perfettamente elastico.

1. Si determini la velocità angolare ω del sistema rigido dopo l' urto se $m = (15|20)g$.
2. Si determini per quale valore di m, con $m > 0$, l'energia cinetica del proiettile subito dopo l'urto è minima e quanto vale in questo caso la velocità angolare del sistema rigido subito dopo l'urto
3. Per questo valore di m si scriva la legge oraria $\vartheta(t)$ del sistema rigido, dove ϑ è l'angolo di cui ruota il sistema rispetto alla posizione iniziale. Si calcoli esplicitamente l'ampiezza massima e la pulsazione del moto in questione.
4. Per lo stesso valore di m si scriva la legge oraria del proiettile dopo l'urto

[Dati Iniziali FILA A: $I = 0.0005$ kg m^2, $R = 9$ cm, $r = 12$ cm, $k = 1.3$ N/m, $v = 35$ cm/s]
[Dati Iniziali FILA B: $I = 0.0007$ kg m^2, $R = 11$ cm, $r = 14$ cm, $k = 0.9$ N/m, $v = 45$ cm/s]



Soluzioni 1

Nel sistema di riferimento non inerziale del cilindro in rotazione vale:

$$\vec{a'} = \vec{a} - \vec{a_t} - \vec{a_{co}}$$

quindi:

$$\vec{F'} = m\vec{a'} = m\vec{a} - m\vec{a_t} - m\vec{a_{co}} = \vec{F} + \vec{F_{app}}$$

1. Nel caso l'uomo rimanga in equilibrio si ha:$\vec{v} = 0$, pertanto:

   $$\vec{F_{co}} = -m2\vec{v} \times \vec{\omega_{min}} = 0$$

   . Per il termine di trascinamento vale invece:

   $$\vec{F_t} = -m\vec{a_t} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

   poichè il sistema non trasla e ruota con velocità angolare costante. Tale termine è la forza centrifuga di cui risente l'uomo nel sistema di riferimento del cilindro.

   $\vec{F_t}$ è diretta lungo il raggio, ha verso uscente e vale in modulo $\omega^2 R$.

   Per il secondo principio della dinamica per l'equilibrio nel sistema in rotazione vale dunque (assumendo come direzione positiva la verticale diretta verso l'asse):

   $$\vec{F_{att}} + \vec{N} + \vec{mg} + \vec{F_t} = m\vec{a'} = 0$$

   che proiettata lungo gli assi dà:
   $\begin{cases} m\omega^2 R - N = 0 \\ -mg + F_{att} = 0 \end{cases}$

   Ricordando che $F_{att} = mg < \mu_S N = \mu_S m\omega^2 R$ si ottiene per la velocità angolare il seguente limite inferiore:

   $$\omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{\mu_S R}}$$

   quindi

   $$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_S R}}$$

2. Se la ω_1 è minore della ω_{min} l'uomo inizierà a cadere. Anche nella fase di caduta il termine di Coriolis è nullo poichè $\vec{v}$ e $om\vec{e}ga$ sono paralleli. Le equazioni della dinamica si scriveranno pertanto:
   $\begin{cases} m\omega_1^2 R - N = 0 \\ -mg + F_{att} = ma_1 \end{cases}$

   Da cui si ricava:
   $\begin{cases} N = m\omega_1^2 R = m(\frac{w_{min}}{2}))^2 R = \frac{mg}{\mu_S 4} \\ -mg + \mu_D N = ma \rightarrow -g + \frac{\mu_D g}{\mu_S 4} = a_1 \end{cases}$

   Quindi per l'accelerazione si ottiene:

   $$a_1 = g\left(\frac{\mu_D}{4\mu_S} - 1\right)$$

   L'uomo in questa fase ovviamente cade accelerando.

3. Per la velocità vale (partendo l'uomo da fermo):
   $\begin{cases} x(t) = \frac{a_1 t^2}{2} \\ \dot{x}(t) = a_1 t \end{cases}$

Si ricava il tempo necessario t^* per salire di un tratto H e si sostituisce nella seconda equazione per ricavare la velocita' del cilindro richiesta:

$$t^* = \sqrt{\frac{2H}{|a_1|}}$$

e quindi:

$$v^* = v(t^*) = a_1 t^* = -\sqrt{2H|a_1|}$$

4. Nel caso generico $\omega_\alpha = \alpha\omega_{min}$ per l'accelerazione si ottiene:

$$a_\alpha = g\left(\frac{\alpha^2\mu_D}{\mu_S} - 1\right)$$

Nel caso specifico di $\omega_2 = 2\omega_{min}$. l'accelerazione vale pertanto:

$$a_2 = g\left(\frac{4\mu_D}{\mu_S} - 1\right)$$

La legge oraria dell'uomo è in questo caso quella di un moto decelerato. Considerando che l'uomo parte da $x(t^*) = H$ con $v(t^*) = v^*$. Quindi:

$$x(t - t^*) = H + v^*(t - t^*) + \frac{a_2(t - t^*)^2}{2}$$

Tabella 1. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
m [kg]	52	63
R [m]	1.2	1.5
H [m]	1.5	1.8
μ_S	0.8	0.9
μ_D	0.3	0.5
g [ms^{-2}]	9.81	9.81
$\omega_{min}[s^{-1}]$	3.20	2.69
a$_1[ms^{-2}]$	-8.89	-8.45
t$^*[s]$	0.58	0.65
v(t*)$[m/s]$	-5.16	-5.51
a$_2[ms^{-2}]$	4.90	11.99

Soluzioni 2

1. Per la statica valgono:

   $$\begin{cases} \mathrm{m}_0 g - \tau = 0 \\ \tau R - F_a R = 0 \\ \text{-Mgsin}\alpha_0 + \tau + F_a = 0 \end{cases}$$

   da cui si ricava:

   $$\tau = F_a = m_0 g$$

2.

   $$g(2m_0 - Msin\alpha_0) = 0$$

   da cui:

   $$\alpha_0 = arcsin(\frac{2m_0}{M})$$

3. Quando il sistema si muove si ha che se il cdm del cilindro sale di Δx:

   - il cilindro ruota, senza strisciare, di un angolo $\theta = \frac{\Delta x}{R}$
   - il corpo m scende di un tratto $\Delta y = 2\Delta x$. Per le equazioni del moto valgono dunque:

   $$\begin{cases} \text{mg-}\tau = m\ddot{y} = 2m\ddot{x} \\ \tau R - F_a R = I\ddot{\theta} = I\frac{\ddot{x}}{R} \\ \text{-Mgsin}\alpha_0 + \tau + F_a = M\ddot{x} \end{cases}$$

   con $I = \frac{MR^2}{2}$. Dal sistema si ricava:

   $$\ddot{x} = \frac{(4m - 2Msin\alpha_0)g}{(8m + 3M)} = \frac{(8m_0 - 2Msin\alpha_0)g}{(16m_0 + 3M)} = \frac{4m_0 g}{(16m_0 + 3M)}$$

4. Si utilizza la conservazione dell'energia meccanica tra istante iniziale e istante finale in cui la massa m è scesa di un tratto L:

   $$E_i = mgL_1 + MgH_1$$

   $$E_f = mgL_2 + MgH_2 + T_{massa} + T_{cilindro} = mgL_2 + MgH_2 + T_{tot}$$

   da cui si ottiene:

   $$T_{tot} = mg(L_1 - L_2) + Mg(H_1 - H_2) = 2m_0 g(L_1 - L_2) - Mg\frac{L}{2}\sin\alpha_0 =$$

   $$= 2m_0 gL - Mg\frac{L}{2}\frac{2m_0}{M} = m_0 gL$$

   Si noti che abbiamo usato le seguenti relazioni:

   $$L_1 - L_2 = L$$

   $$H_2 - H_1 = \Delta x \sin\alpha_0 = \frac{L}{2}\sin\alpha_0$$

Tabella 2. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
M [kg]	3	2.8
$m_0 [kg]$	0.9	0.6
R [m]	0.5	0.5
L [m]	1.2	1.4
g [ms^{-2}]	9.81	9.81
τ [N]	8.83	5.89
α_0 [rad]	0.64 (37 deg)	0.44 (25 deg)
$\ddot{x}$ [ms^{-2}]	1.51	1.31
T_{tot} [J]	10.59	8.24

Soluzioni 3

1. Nell' urto elastico del proiettile con il sistema rigido si conservano il momento angolare rispetto ad A e l'energia cinetica. Inoltre poichè il proiettile colpisce l'asta con direzione ortogonale ad essa, la sua velocità dopo l'urto sarà parallela alla velocità iniziale. Le due leggi di conservazione si possono dunque scrivere come:
$$mrv = mrv' + I\omega \quad \Rightarrow \quad mr(v - v') = I\omega$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m(v^2 - v'^2) = \frac{1}{2}m(v - v')(v + v') = \frac{1}{2}I\omega^2$$
Dalla prima espressione si ottiene
$$\omega = \frac{mr}{I}(v - v')$$
Dividendo la seconda espressione per la prima si ottiene:
$$\frac{v + v'}{r} = \omega$$
ed eliminando ω si ricava v':
$$v' = \frac{mr^2 - I}{mr^2 + I}v$$
che sostituita in una delle due espressioni di ω dà:
$$\omega_0 = \frac{2m_0 r}{m_0 r^2 + I}v$$

2. Il valore minimo dell'energia cinetica del proiettile dopo l'urto si avrà in corrispondenza di v' (già ricavata al punto precedente) nulla, che si ottiene per
$$m = I/r^2$$
. In questo caso la nuova velocità angolare del sistema è data da:
$$\omega = \frac{2I/r}{I + I}v = \frac{v}{r}$$

3. Una rotazione di ϑ corrisponde ad un allungamento della molla pari a $R\vartheta$. Il sistema rigido è soggetto al momento della forza di richiamo della molla, per cui la seconda equazione cardinale si scrive:
$$M = Rf = RkR\vartheta = I\ddot{\vartheta}$$
La soluzione è una rotazione sinusoidale $\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin \Omega t$ di pulsazione
$$\Omega = \sqrt{\frac{kR^2}{I}}$$

e di ampiezza

$$\vartheta_0 = \frac{d}{R}$$

dove d è l'allungamento massimo della molla che si ricava dalla conservazione dell'energia. Poichè come visto nel punto precedente tutta l'energia cinetica iniziale del proiettile si ritrova come energia potenziale della molla, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui:

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La legge oraria è dunque

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin \Omega t = \frac{d}{R} \sin \Omega t$$

La rotazione armonica si arresta però dopo il primo semiperiodo, perchè il corpo rigido colpirà nuovamente il proiettile fermo, trasferendogli tutta l'energia cinetica ed arrestandosi.

4. Il proiettile rimane fermo fino all'istante $t = \pi/\Omega$, per poi descrivere un moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}' = -\vec{v}$

Tabella 3. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
I [kgm^2]	0.0005	0.0007
R [cm]	9	11
r [cm]	12	14
k [N/m]	1.3	0.9
v[cm/s]	35	45
m_0 [g]	15	20
ω_0 [1/s]	1.76	2.31
m [g]	34.7	35.7
ω [1/s]	2.91	3.21
v'[cm/s]	0	0
Ω [1/s]	4.59	3.94
d [cm]	5.72	8.96
θ_0	0.636	0.81