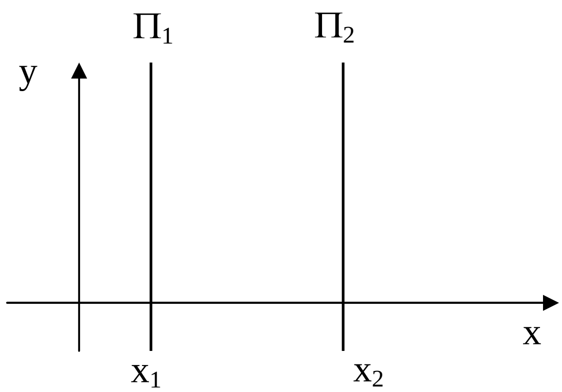
Esercizio n.1 [12 punti]

Due piani paralleli e infiniti di spessore trascurabile Π_1 (x_1= costante) e Π_2 (x_2= costante), disposti come in figura, hanno una densità di carica superficiale rispettivamente σ_1 e σ_2 .

Si calcolino il campo elettrico ed il potenziale in tutto lo spazio assumendo uguale a 0 il potenziale del piano Π_2.

Si faccia un disegno schematico del campo elettrico e del potenziale risultante.

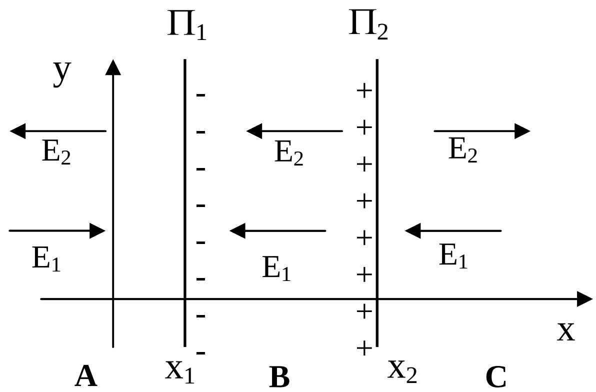
Dati: σ_1= -2 ε_0 V/m ; σ_2 = 5 ε_0 V/m ; dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto; x_1= 1 m ; x_2= 4 m.



Soluzione

I due piani generano due campi elettrici costanti ed uniformi di modulo $E=\sigma/2\varepsilon_0$, diretti come in figura, dove le tre zone all'interno e all'esterno dei piani sono state indicate con le lettere A, B e C.

Il campo elettrico totale si trova sommando i due campi parziali (principio di sovrapposizione), nelle tre zone, quindi:



$$zona\ A: x < x_1 \quad E_{A,x} = (E_1 - E_2) = \frac{|\sigma_1| - |\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = -\frac{3}{2} \quad V/m$$

$$zona\ B: x_1 < x < x_2 \quad E_{B,x} = -(E_1 + E_2) = -\frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = -\frac{7}{2} \quad V/m$$

$$zona\ C: x > x_2 \quad E_{C,x} = (E_2 - E_1) = \frac{|\sigma_2| - |\sigma_1|}{2\varepsilon_0} = \frac{3}{2} \quad V/m$$

Il potenziale si calcola applicando la relazione $V(x) = -\int \overline{E}(x) \cdot d\overline{x}$ utilizzando l'informazione che $V(x_2)$=0, e scegliendo le costanti in modo da raccordare le soluzioni.

$$V_C(x) = -E_C \cdot x + C_C \quad ; \; V_C(x_2) = 0 \quad \Rightarrow C_C = E_C \cdot x_2 \Rightarrow V_C(x) = E_C(x_2 - x)$$

$$V_B(x) = -E_B \cdot x + C_B \quad ; V_B(x_2) = V_C(x_2) = 0 \quad \Rightarrow C_B = E_B \cdot x_2 \Rightarrow V_C(x) = E_B(x_2 - x)$$

$$V_A(x) = -E_A \cdot x + C_A \quad ; V_A(x_1) = V_B(x_1) \quad \Rightarrow C_A = E_B \cdot (x_2 - x_1) + E_A \cdot x_1 = E_B \cdot x_2 + (E_A - E_B) \cdot x_1$$

$$\Rightarrow V_A(x) = -E_A \cdot x + E_B \cdot x_2 + (E_A - E_B) \cdot x_1$$

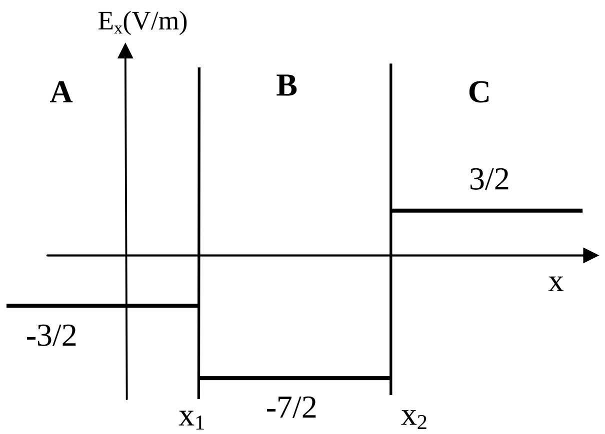
In corrispondenza dei piani il potenziale assume i valori: $V(x_2)=0$, $V(x_1)=-21/2$ V ; nelle zone A,B e C:

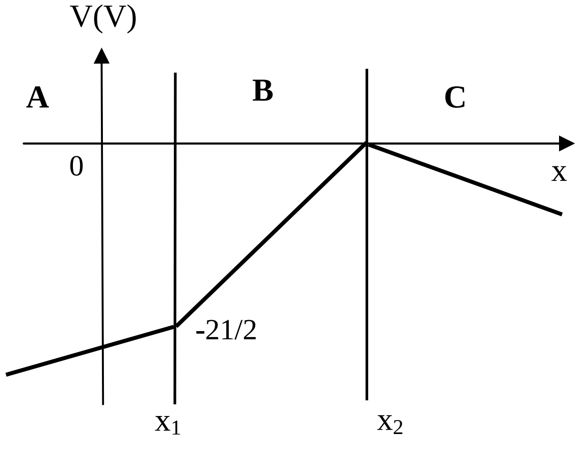
$$x \geq x_2 \qquad : V_C(x) = -\frac{3}{2}(x-4) \quad V$$

$$x_1 \leq x \leq x_2 \; : V_B(x) = -\frac{7}{2}(4-x) \quad V$$

$$x \leq x_1 \qquad : V_A(x) = \frac{3}{2}(x-8) \quad V$$

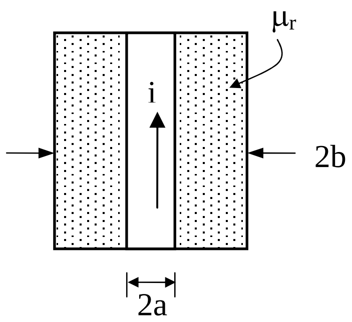
Gli andamenti del campo elettrico E_x e del potenziale V sono:





Esercizio n.2 [10 punti]

Sezione di un tratto del cavo



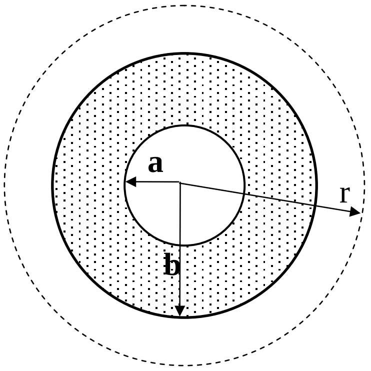
Un cavo coassiale infinito (vedi schema) è composto da una sezione cilindrica interna di diametro ***2a***, conduttrice, percorsa uniformemente da una corrente costante ***i*** . Intorno a questa sezione è posta una corona cilindrica di diametro ***2b*** e permeabilità magnetica relativa μ_r. Calcolare il campo magnetico ***H*** in tutti i punti dello spazio e le densità delle correnti di magnetizzazione che scorrono lungo le superfici laterali della corona isolante.

Dati: ***a*** = 1mm ; ***b*** = 3 mm ; ***i*** = 3 A ; μ_r = 3

Soluzione

Si faccia riferimento alla figura a lato. Data la simmetria del sistema i campi ***B, M*** ed ***H*** hanno una direzione circolare intorno all'asse centrale del cavo avente direzione ***z,***

Per calcolare il campo ***H*** si può utilizzare la legge di Ampère scritta per una generica circonferenza di raggio ***r.***



$\oint \overline{H} \cdot d\overline{l} = i_c(conduzione, concatenate)$, quindi :

$H(r) = \dfrac{i_c}{2\pi r}$ con verso antiorario per correnti uscenti dal foglio

Abbiamo i due casi:

$r \geq a \quad i_c = i \qquad H(r) = \dfrac{i}{2\pi r}$

$r \leq a \quad i_c = i\,\dfrac{\pi r^2}{\pi a^2} = i\,\dfrac{r^2}{a^2} \qquad H(r) = \dfrac{i\,r}{2\pi a^2}$

Per calcolare il valore delle densità delle correnti superficiali di magnetizzazione si può utilizzare la relazione:

$J_s = \overline{M} \times \overline{n}$ dove $\overline{M} = \chi\,\overline{H} = (\mu_r - 1)\overline{H}$ è il valore dell'intensità di magnetizzazione, ed ***n*** la direzione della normale alla superficie considerata, quindi rivolta verso l'esterno per la superficie esterna, di raggio ***b***, rivolta verso l'interno per la superficie interna, di raggio ***a.***

Avremo quindi

Superficie esterna $r = b$; $H(b) = \dfrac{i}{2\pi b}$; $M_b = i\,\dfrac{(\mu_r - 1)}{2\pi b}$; $\overline{J}_{se} = -i\,\dfrac{(\mu_r - 1)}{2\pi b} = -0{,}32\ kA/m^2$

Superficie interna $r = a$; $H(a) = \dfrac{i}{2\pi a}$; $M_a = i\,\dfrac{(\mu_r - 1)}{2\pi a}$; $\overline{J}_{si} = i\,\dfrac{(\mu_r - 1)}{2\pi a} = 0{,}95\ kA/m^2$

Le correnti di magnetizzazione di volume sono nulle, infatti all'interno della corona cilindrica:.

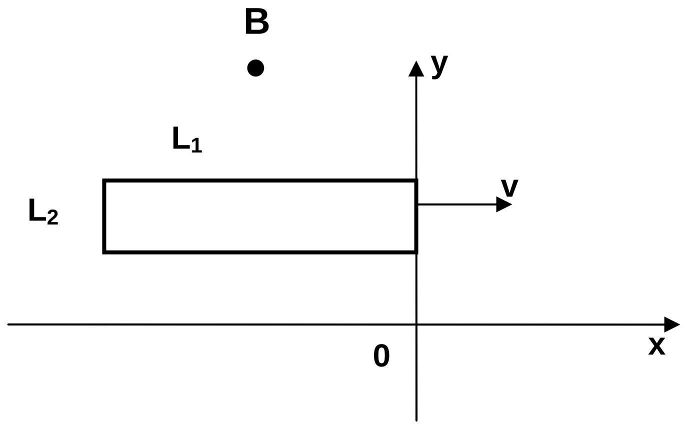
$\overline{J}_v = rot\,\overline{M} = (\mu_r - 1)\,rot\,\overline{H} = \overline{J}(conduzione) = 0$

Esercizio n.3 [8 punti]

Un campo magnetico $\overline{B} = B\hat{z}$ costante ed uniforme è presente nella metà di spazio in cui *x<0*. Una spira rettangolare di lati l_1 ed l_2 , e resistenza elettrica *R*, è disposta, all'istante t=0, come in figura. Supponendo di estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico con velocità costante $\overline{v} = v\ \hat{x}$, si calcoli il lavoro necessario per estrarla completante. Si trascuri l'induttanza del circuito.

Dati: l_1=10 cm ; l_2= 2 cm ;

R=1 mΩ ; B=5 T ; v= 3 cm/s



Soluzione

Se la velocità è costante, la risultante delle forze applicate deve essere nulla. Quando si estrae la spira, uscendo dalla zona in cui il campo magnetico è diverso da zero, il flusso di ***B*** concatenato alla spira varierà, inducendo una f.e.m. e quindi una corrente ***i***. Questa corrente, interagendo con il campo magnetico, genera una forza di verso opposto alla velocità che deve essere controbilanciata da una forza uguale e contraria.

Calcolo della corrente indotta:

$$i = \frac{f}{R} \quad ; \quad f = -\frac{d\phi(B,x)}{dt} \quad ; \quad \text{dove :}$$

$$\phi(B,x) = [\text{flusso di B quando la spira è uscita di un tratto x dalla zona in cui } B \neq 0] = B \cdot L_2 \cdot (L_1 - x)$$

quindi: $f = -\dfrac{d\left(BL_2\left(L_1 - x\right)\right)}{dt} = BL_2 v$ e $i = \dfrac{BL_2 v}{R}$

Il verso della corrente indotta sarà tale da opporsi alla variazione di flusso, date che il flusso diminuisce, il verso sarà tale da farlo aumentare, quindi antiorario, in modo da generare un campo indotto concorde con B.

La spira sarà quindi soggetta, per ogni lato, ad una forza $\overline{F} = i \cdot \overline{L}_{1,2} \times \overline{B}$

Le forze sui due lati paralleli alla velocità sono uguali e contrarie, quindi si annullano, rimane la forza che si esercita sul lato L_2 che si trova all'interno della zona in cui c'è il campo B.

$$\overline{F}(L_2) = -iL_2 B\,\hat{x} = -\frac{BL_2 v}{R} \cdot L_2 B\,\hat{x} = -\frac{B^2 L_2^2\, v}{R}\,\hat{x}$$

Il lavoro fatto per estrarre tutta la spira, applicando una forza costante $\overline{F} = -\overline{F}(L_2)$ sarà:

$$L = \int_0^{L_1} \overline{F} \cdot d\overline{x} = F \cdot L_1 = \frac{B^2 L_2^2 \cdot L_1 \cdot v}{R} = \frac{25 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{0{,}001} = 0{,}03 \quad J$$