Esercizio n.1 [8 punti]

Un condensatore di capacità $\boldsymbol{C_0}$, è collegato ad una f.e.m. costante $\boldsymbol{V}$. Se lo spazio fra le armature viene riempito con un materiale dielettrico, si misura una variazione $\boldsymbol{\Delta Q}$ della carica del condensatore.

Si calcoli la costante dielettrica relativa del materiale inserito nel condensatore e l'eventuale lavoro (positivo, negativo o nullo) compiuto dalla f.e.m. per mantenere costante la tensione ai capi del condensatore.

Dati: $\boldsymbol{C_0=100\ nF,\ V=150\ V,\ \Delta Q=30\ \mu C.}$

Soluzione

Essendo il condensatore collegato alla f.e.m. la tensione V rimarrà costante, mentre la capacità aumenterà di un fattore ε_r quindi:

$$V=\frac{Q_0}{C_0}=V_f=\frac{Q_0+\Delta Q}{C_f}=\frac{Q_0+\Delta Q}{\varepsilon_r\, C_0}$$

Da cui si ha che $\varepsilon_r=1+\frac{\Delta Q}{Q_0}=1+\frac{\Delta Q}{C_0 V}=1+\frac{30\cdot 10^{-6}}{100\cdot 10^{-9}\cdot 150}=3$

Il lavoro totale fatto dalla f.e.m. è:

$$L=V\Delta Q=150\cdot 30\cdot 10^{-6}=4{,}5\quad mJ$$

Nota: metà va in aumento dell'energia e.s. del condensatore, metà in lavoro meccanico.

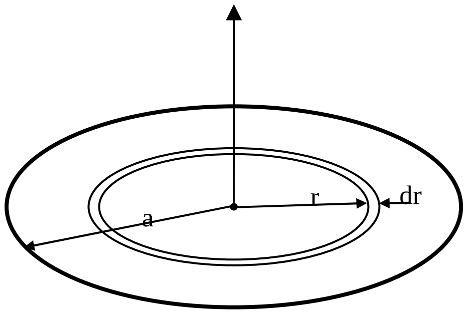
Esercizio n.2 [10 punti]

Sulla superficie di un disco circolare sottile di raggio ***a*** è posta una carica uniforme ***Q***. Il disco ruota con frequenza ***f*** intorno ad un asse passante per il centro e perpendicolare al piano del disco.

1) Si calcoli il valore del campo magnetico H lungo l'asse di rotazione, in un punto ***z>>a***.
2) Supponendo ora di schematizzare il disco come una spira sottile circolare di raggio ***a*** percorsa da una corrente ***i***, si calcoli, utilizzando il teorema di Ampère, il valore di ***i*** che fornisce lo stesso campo H calcolato precedentemente.

Dati: *a=2 cm ; Q=30nC f= 1200 giri/minuto ; z=50 cm*

Soluzione



1) Il disco carico che ruota è equivalente alla somma una di una serie di spire di spessore ***dr*** in cui circola una corrente ***di***, ognuna delle quali genera nello spazio un campo ***dH.***

Per calcolare il campo totale ***H*** conviene scrivere il campo ***dH*** per la spira infinitesima di spessore ***dr*** , e poi integrare su tutto il raggio.

$$dH(z) = \frac{1}{2}\frac{di \cdot r^2}{\left[z^2 + r^2\right]^{3/2}} \cong \frac{1}{2}\frac{di \cdot r^2}{z^3}$$

avendo utilizzato l'informazione: ***z>>a≥r*** [a]. La corrente elementare e $di = \frac{dq}{dt} = \frac{2\pi r \cdot dr \cdot \sigma}{1/f} = 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma f$,

avendo indicato con σ la densità di carica superficiale $\sigma = Q/\pi a^2$.

Si ha quindi: $dH(z) = \frac{r^2\, 2\pi r\, dr\, \sigma f}{2z^3} = \frac{f Q}{a^2 z^3} \cdot r^3 dr$ e, integrando fra ***0*** e ***a***:

$$H(z) = \int_0^a dH(z) = \frac{f Q}{a^2 z^3}\int_o^a r^3 dr = \frac{f Q}{a^2 z^3}\frac{a^4}{4} = \frac{a^2 f Q}{4z^3} = \frac{0{,}02^2 \cdot 1200 \cdot 30 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 60 \cdot 0{,}5^3} = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \ A/m$$

[Si arriva allo stesso risultato calcolando il momento magnetico ***m*** equivalente associato al disco ruotante, ed il campo generato lungo l'asse di ***m***]

2) Nel caso di una spira circolare di raggio ***a***, percorsa da corrente ***i***, il teorema di equivalenza di Ampère fornisce il momento magnetico associato alla spira:

$M = i \cdot S = i \cdot \pi a^2$ che genera, per z>>a, sull'asse, un campo $H(z) = \frac{M}{2\pi z^3} = \frac{i a^2}{2z^3}$

Questo campo è uguale al precedente quando $\frac{i a^2}{2z^3} = \frac{a^2 f Q}{4z^3}$ cioè se: $i = \frac{fQ}{2} = \frac{1200 \cdot 30 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 60} = 0{,}3\ \mu A$

[a] Se si volesse mantenere l'espressione completa per ***H(z,r)*** e fare l'approssimazione dopo avere eseguito l'integrale, è necessario tenere almeno i primi tre termini dello sviluppo in serie, altrimenti il campo ***H(z)*** risulta nullo, il che è ovviamente impossibile.

Esercizio n.3 [12 punti]

Le armature di un condensatore piano, vengono portate ad una tensione $\boldsymbol{V_0}$. Successivamente lo spazio fra le armature viene riempito con acqua distillata a 20 ^{0}C, di resistività ρ e costante dielettrica relativa ε_r.

1) Si supponga che la variazione iniziale di carica sia istantanea e che la pila venga poi scollegata. Trovare il rapporto fra la densità della corrente di conduzione e la densità della corrente di spostamento in funzione del tempo.

2) Si supponga ora che al condensatore, con l'acqua distillata fra le armature, venga applicata una tensione alternata $V(t)= V_0 \cos \omega t$. Volendo calcolare la densità della corrente che attraversa il condensatore in condizioni stazionarie, si calcoli per quale intervallo della pulsazione ω posso trascurare la densità della corrente di spostamento rispetto alla densità della corrente di conduzione, commettendo un errore inferiore all'1%.

Si faccia il confronto fra i valori efficaci (rms) delle due correnti considerate.

Dati: $\rho = 18\ 10^4\ \Omega m\ ;\ \varepsilon_r = 78$

Soluzione

1) Inizialmente il condensatore si trova ad una tensione V_0 , con l'acqua inserita fra le armature. Una volta scollegata la pila il condensatore si scarica attraverso la resistenza del dielettrico con una costante di tempo τ pari a quella di un condensatore ideale $\boldsymbol{C}$ con in parallelo una resistenza $\boldsymbol{R}$.

$$\tau = RC = \rho \frac{h}{S} \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{h} = \rho\, \varepsilon_r \varepsilon_0 = 124\, \mu s$$

, avendo indicato con $\boldsymbol{S}$ la superficie della sezione del condensatore e con $\boldsymbol{h}$ la distanza fra le armature.

La tensione andrà quindi a zero con l'andamento di un esponenziale decrescente $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$

Il valore della densità della corrente di conduzione sarà $J_c(t) = \frac{i(t)}{S} = \frac{V(t)}{R\,S} = \frac{V(t)}{\rho h}$

Il valore della densità della corrente di spostamento sarà:

$$J_s(t) = \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_r \varepsilon_0 E(t)\right) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{V(t)}{h}\right) = -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{h}\frac{\partial V(t)}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{h}\frac{\partial}{\partial t}\left(V_0 e^{-t/\tau}\right) =$$

$$= -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{h} V_0 \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} = \frac{V(t)}{\rho h} = J_c(t)$$

Le due densità di corrente sono quindi uguali ad ogni istante, il loro rapporto è sempre 1.

2) Se al condensatore viene applicata una tensione $V(t)=V_0 \cos \omega t$ si ha che la densità della corrente di conduzione ha la stessa espressione calcolata precedentemente, sostituendo l'espressione di $V(t)$:

$$J_c(t) = \frac{i(t)}{S} = \frac{V(t)}{R\,S} = \frac{V(t)}{\rho h} = \frac{1}{\rho h} V_0 \cos(\omega t) \quad ; \quad J_c^{rms} = \frac{V_0}{\rho h \sqrt{2}}$$

La densità della corrente di spostamento sarà:

$$J_s(t) = \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_r \varepsilon_0 E(t)\right) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{V(t)}{h}\right) = -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{h}\frac{\partial V(t)}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{h}\frac{\partial}{\partial t}\left(V_0 \cos(\omega t)\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{h} V_0\, \omega\, sen(\omega t) = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega}{h} V_0 sen(\omega t) \quad ; \quad J_s^{rms} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega V_0}{h\sqrt{2}}$$

La variazione percentuale delle due densità di corrente sarà:

$$\frac{J_s^{rms} - J_c^{rms}}{J_c^{rms}} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega - 1/\rho}{1/\rho} = \tau\,\omega \le 1\% \quad \text{per} \quad \omega \le \frac{0{,}01}{\tau} = \frac{0{,}01}{124 \cdot 10^{-6}} = 80\ rad/s$$