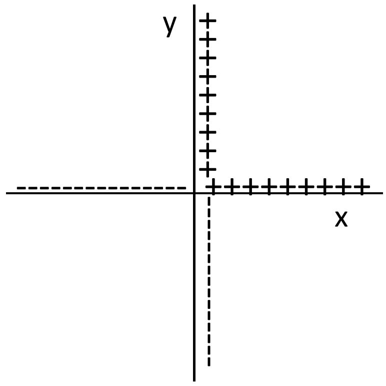
Esercizio n.1 [10 punti]



Siano dati due segmenti uguali, lunghi ***2d***, complanari, posti a 90^0 e che si attraversano lungo l'asse. Sui segmenti sono poste le distribuzioni di carica $\pm\lambda$ come in figura. Calcolare il momento di dipolo del sistema in modulo e direzione.

Dati: $|\lambda|$= 3 μC/m ; d= 2 cm.

Soluzione

Il momento di dipolo di un sistema continuo con densità di carica lineare λ è $\bar{p} = \int \lambda \bar{r}\ dr$. La componente x si può scrivere $\bar{p}_x = \int \lambda \bar{x}\ dx = \int_{-d}^{0} (-\lambda)\,(-x\hat{x})dx + \int_0^d (\lambda)\,(x\hat{x})dx = \lambda\left[\frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{2}\right]\hat{x} = \lambda d^2\ \hat{x}$ analogamente, la componente y:

$\bar{p}_y = \lambda d^2\ \hat{y}$ quindi: $\bar{p} = \bar{p}_x + \bar{p}_y = \lambda d^2\ (\hat{x} + \hat{y})$ il modulo del momento di dipolo è *p =* $\sqrt{2}\ \lambda d^2 \cong 1{,}41 \cdot 3\ 10^{-6} \cdot 4\ 10^{-4} \cong 1{,}7$ *nC ·m*

La direzione è quella della bisettrice a 45^0 fra gli assi +x e +y.
Nel caso si fosse calcolato il momento in coordinate polari (r,θ) si avrebbe: $r = \lambda d^2\sqrt{2}$ e $\theta = \pi/4$

Nota 1: Questo è un problema in cui il risultato numerico può venire quello giusto anche se lo svolgimento è concettualmente errato.
Nota 2: La distribuzione continua di carica è equivalente, per calcolare il momento di dipolo, a due cariche puntiformi di valore Q=$\pm\lambda$d poste in $\pm$d/2 . Ma questo va dimostrato, non è ovvio.

Esercizio n.2 [10 punti]

Sia dato un conduttore cilindrico pieno di raggio ***a*** e altezza ***h***, con ***h>>a***. Il cilindro ruota intorno al suo asse con velocità angolare costante ω Calcolare la differenza di potenziale esistente, in condizioni stazionarie, fra l'asse centrale e la superficie esterna del cilindro. Calcolare inoltre la relativa densità di carica di volume.

Dati: a=15 cm ; ω= 1600 rad/s ; m(massa elettrone)= 9 10^{-31} kg ; |e|= e = 1,6 10^{-19} C.

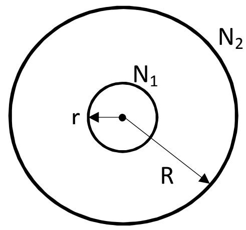
Soluzione

In condizioni stazionarie gli elettroni, nel loro sistema di riferimento, sono sottoposti ad una forza centrifuga $\bar{F}_c = m\omega^2\bar{r}$ che sarà equilibrata dal campo elettrico risultante dallo sbilanciamento delle cariche $\bar{F}_E. = q\bar{E} = -e\,\bar{E}$, quindi il campo Elettrico sarà $\bar{E} = \frac{\bar{F}_c}{e} = \frac{m\omega^2}{e}\bar{r}$, e la differenza di potenziale $V(0) - V(a) = \int_0^a \bar{E}\cdot d\bar{r} = \frac{m\omega^2}{2e}a^2 = \frac{9\ 10^{-31}(1600\times 0{,}15)^2}{2\ \cdot 1{,}6\ 10^{-19}} \cong 0{,}16\ \mu V$

Per il calcolo della densità di carica si può utilizzare la relazione $div\bar{E} = \rho/\varepsilon_0$ da cui, dato che per la simmetria del sistema ρ deve essere funzione della sola r, si ha $\rho(r) = \frac{\partial rE}{r\partial r}\cdot\varepsilon_0 = \varepsilon_0\frac{2m\omega^2}{e} = \frac{2\cdot 8{,}85\ \cdot 10^{-12}\cdot 9\cdot\ 10^{-31}\cdot 2{,}56\ 10^6}{1{,}6\ 10^{-19}} \cong 2{,}4\ \ 10^{-16}\ \frac{C}{m^3}$

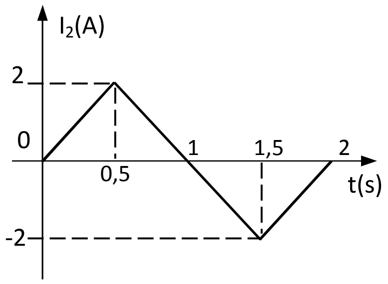
Esercizio n.3 **[10 punti]**

Una bobina a sezione circolare, con N_1 spire e di raggio r, è posta all'interno di una seconda bobina, complanare e di sezione circolare, con N_2 spire e di raggio R>>r. Le due bobine hanno i centri in comune, il diametro dei fili e la sezione totale sono trascurabili. Calcolare il coefficiente di mutua induzione esistente fra le bobine, e la forza elettromotrice indotta nella bobina minore quando nella maggiore circola una corrente I_2 che ha l'andamento mostrato in figura. Fare un grafico della f.e.m. indotta.



Disegno non in scala

Dati:* N_1 *=200 ;* N_2 *= 400 ; R= 20 cm ; r=0,5 cm.



Soluzione

Il coefficiente di mutua induzione sarà: $M = \phi_{21}/I_2$, il flusso del campo B generato dalla bobina 2 nella bobina 1 sarà

$\phi_{21} = \int_1 B_2 ds = B_2^1(0) \cdot \pi r^2 \, N_1 N_2$ dove il campo $B_2^1(0)$ è il campo generato da "una" spira della bobina 2 al centro della bobina 1.

La bobina 1 è molto più piccola della 2, infatti r/R= 1/40, quindi il campo al suo interno può essere considerato costante ed uguale a quello nel suo centro.

Quindi $B_2^1(0) = \mu_0 I_2/2R$, *e* $M = \frac{\mu_0 \, \pi r^2 \, N_1 N_2}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\pi}{4} \, 10^{-4} \cdot 200 \cdot 400}{2 \cdot 0{,}2} = \frac{7{,}8 \; 10^{-6}}{0{,}4} \cong 20 \; \mu H$

La f.e.m. sarà $f = -\frac{d\phi}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$, la pendenza di I_2 è costante in modulo, cambia solo di segno nei punti 0,5 s e 1,5 s.

$dI_2/dt = \Delta I_2/\Delta t$=2A/0,5s=4 A/s , quindi $f = \mp 20 \; 10^{-6} \cdot 4 = \mp 80 \; \mu V$ costante nei tratti a pendenza costante.

Il grafico della f.e.m. sarà quindi: