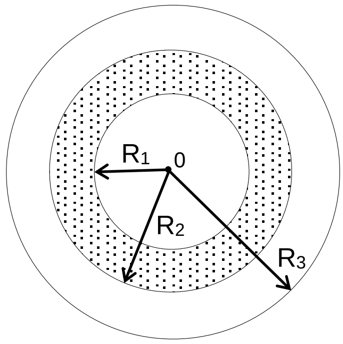
Esercizio n.1 [11 punti]



Nello spazio vuoto è presente il sistema mostrato in figura, composto da tre superfici sferiche conduttrici concentriche di raggi R_1, R_2 e R_3 e di spessore trascurabile. Lo spazio fra R_1 e R_2 è riempito con una distribuzione di carica di volume $\rho(R)=a/R$. Si chiede di calcolare: 1) Le espressioni del campo e del potenziale elettrostatico in tutto lo spazio. 2) Il valore e la posizione del massimo del campo elettrico e del potenziale. 3) Fare due grafici mostrando gli andamenti del campo elettrico e del potenziale relativo, in funzione di R.

Dati: $R3 = 2 \cdot R1 \;\; ; \quad R2 = \sqrt{2} \cdot R1 \;\; ; \quad R1 = 10\ cm \;\; ; \quad a = 8{,}85\ nC/m^2$

Soluzione

Il problema si risolve scrivendo il campo elettrico nelle quattro zone dello spazio, calcolato utilizzando il teorema di Gauss, e calcolando il relativo potenziale, imponendone poi la continuità nei punti di passaggio fra una zona e l'altra. Data la simmetria del problema l'unica componente del campo è secondo la direzione radiale R.

Nota: Nel testo si parla di "superfici sferiche", non di "sfere", è diverso. Nelle formule finali ho utilizzato le relazioni fra R1, R2 ed R3, per cui, per esempio $(R2^2 - R1^2) = R1^2$...

3) **R3≤R**: $E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$ dove $Q = \int_{R1}^{R2} 4\pi R^2 \rho(R)dR = \int_{R1}^{R2} 4\pi R^2 \frac{a}{R} dR = 2\pi a \cdot R1^2$, quindi $E_3(R) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R1}{R}\right)^2$

$V_3 = -\int E dR = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + c_3 \;\; ; \;\; V(\infty) = 0, \rightarrow \;\; c_3 = 0 \;,\; V_3(R) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\frac{R1^2}{R} \;,\; V_3(R3) = \frac{a\,R1}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}$

2) **R2≤R≤R3:** Le cariche indotte sulla superficie R3 (-Q all'interno e +Q all'esterno) non danno alcun contributo al campo E e al potenziale, eccetto che nella sottilissima zona che rappresenta lo spessore del conduttore, che non consideriamo, quindi: $E_2(R) = E_3(R) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R1}{R}\right)^2 \; ; \; V_2(R) = V_3(R) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\frac{R1^2}{R}$

e $\quad E_2(R2) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R1}{R2}\right)^2 = \frac{a}{4\varepsilon_0} \quad ; \quad V_2(R2) = \frac{a\,R1}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}}$

1) **R1≤R≤R2**: $\quad E(R)\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q_i(R)}{\varepsilon_0}$ dove $Q_i(R) = \int_{R1}^{R} 4\pi R^2 \rho(R) dR = 2\pi a \cdot (R^2 - R1^2)$,

quindi $E_1(R) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\left[1 - \left(\frac{R1}{R}\right)^2\right] \; ; \; V_1(R) = -\frac{a}{2\varepsilon_0}\left(R + \frac{R1^2}{R}\right) + c_1$

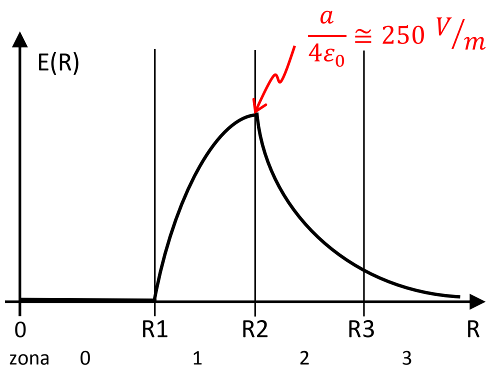
Per calcolare c1 imponiamo: $V_1(R2) = V_2(R2)$, da cui si ha: $c_1 = \frac{a\,R1}{2\varepsilon_0}\frac{4}{\sqrt{2}}$,

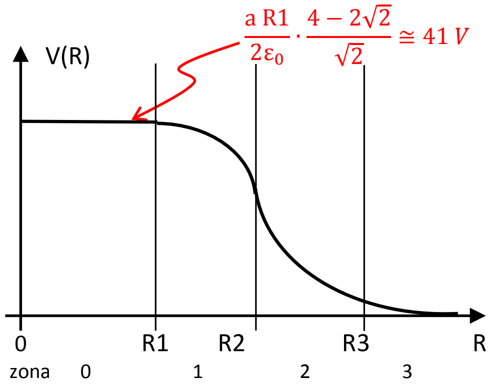
e quindi: $\quad V_1(R) = \frac{a\cdot R1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{R1}{R} - \frac{R}{R1}\right), \;\; V_1(R2) = \frac{a\,R1}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}}$

0) **0≤R≤R1:** Non ci sono cariche all'interno, quindi: $\phi(E) = 0 \;\; \rightarrow E_0 = 0 \; ; V_0 = c_0 \;\; ;$

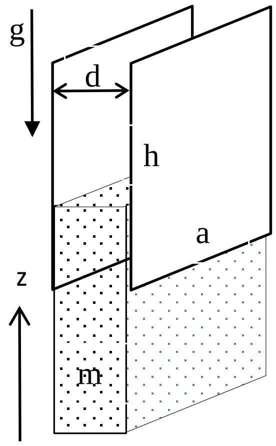
$V_0(R1) = V_1(R1) = \frac{a\,R1}{2\varepsilon_0}\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cong 41\ V$, che è anche il valore massimo del potenziale.

Il campo E massimo si ha per R=R2: $E_{max} = E(R2) = \frac{a}{4\varepsilon_0} \cong 250\ {}^{V}/_{m}$.





Esercizio n.2 [10 punti]



Si consideri un condensatore di dimensioni a, h, d posto rigidamente nel campo gravitazionale (vedi figura) e caricato con una carica Q_0. Dentro il condensatore, (supposto ideale), viene posto un parallelepipedo di massa m e materiale dielettrico ε_r che ha le stesse dimensioni del condensatore (appena inferiori per permettergli di scorrere all'interno del condensatore). Il parallelepipedo può muoversi solo lungo la direzione verticale (z). Si discuta l'equilibrio statico del parallelepipedo calcolando, se esiste, la posizione di equilibrio stabile.

Dati: a= 2 cm ; h= 10 cm ; d= 5 mm ; $Q_0 = 0{,}92\ \mu C$; $\varepsilon_r = 3$; m = 60 g.

Soluzione

Supponendo che il dielettrico sia entrato dal basso per un tratto z dentro il condensatore, lasciando quindi un tratto (h-z) vuoto, il condensatore risultante può essere scritto come il parallelo, quindi la somma, dei due condensatori:

$C = C_z + C_{h-z} = \varepsilon_0\, \varepsilon_r \frac{az}{d} + \varepsilon_0 \frac{a(h-z)}{d} = \frac{\varepsilon_0 ah}{d}\left(1+\frac{z}{h}(\varepsilon_r - 1)\right) = C_0\left(1+\frac{z}{h}(\varepsilon_r-1)\right)$, avendo indicato con $C_0 = \varepsilon_0 \frac{ah}{d}$ il valore della capacità senza dielettrico, in cui $0 \le z \le h$.

L'energia e.s. del condensatore, caricato con la carica Q_0, è: $U_{e.s.} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{U_0}{\left(1+\frac{z}{h}(\varepsilon_r-1)\right)}$, dove $U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0} = 0{,}12\ \mathrm{J}$

La forza totale che agisce sul dielettrico è : $\overline{F} = \overline{F}_{e.s.} + \overline{F}_g$ in cui esistono solo le componenti verticali:

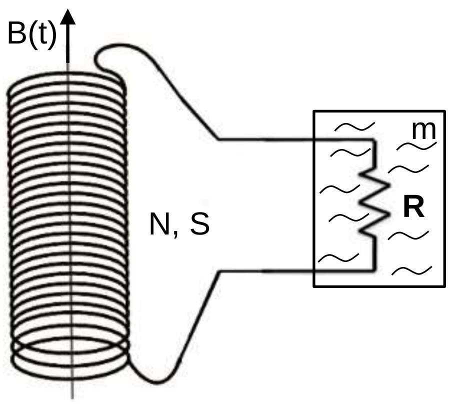
$F_z = -\frac{\partial U_{e.s.}}{\partial z} - mg = \frac{U_0(\varepsilon_r-1)}{h\left(1+\frac{z}{h}(\varepsilon_r-1)\right)^2} - mg$, all'equilibrio si deve avere $F_z=0$, quindi $\frac{U_0(\varepsilon_r-1)}{h\, mg} = \left(1+\frac{z_e}{h}(\varepsilon_r-1)\right)^2$

Chiamando $\gamma^2 = \frac{U_0(\varepsilon_r-1)}{h\, mg}$, ho: $\gamma = 1 + \frac{z_e}{h}(\varepsilon_r-1), \rightarrow\ z_e = h\frac{\gamma-1}{\varepsilon_r-1}$ (valori di z negativi non sono ammessi).

Numericamente: $\gamma = \sqrt{\frac{U_0(\varepsilon_r-1)}{h\, mg}} = \sqrt{\frac{0{,}12\cdot 2}{0{,}1\cdot 0{,}06\cdot 9{,}8}} = \sqrt{4} = 2,\ \rightarrow z_e = h\frac{2-1}{3-1} = \frac{h}{2} = 5\ \mathrm{cm}$

Esercizio n.3 [9 punti]

Si consideri il circuito in figura composto da un solenoide di N spire circolari di superficie S e da una resistenza R. Il solenoide è inizialmente immerso in un campo di induzione magnetica costante $\boldsymbol{B_0}$. All'istante ***t=0*** il campo inizia a variare con legge $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{B_0}\, e^{-t/\tau}$. Si calcoli l'energia dissipata in totale nella resistenza ***R***. Supponendo inoltre che la resistenza R sia in contatto con una massa ***m*** di acqua (isolata termicamente dall'esterno), si calcoli la variazione di temperatura che avrà subito l'acqua al termine del processo.
Si suppongano trascurabili l'induttanza del solenoide e la capacità termica della resistenza.



Dati: $B_0 = 8\ T$; N=100 ; $S= 10\ cm^2$; $R= 1\ \Omega$; $\tau= 0{,}1\ s$; m(acqua)= 10 g

Soluzione

La variazione temporale del campo B provoca una variazione del flusso di B concatenato con il solenoide, che genera una f.e.m. indotta, e quindi una corrente che scorre nel circuito, nella resistenza R, fin quando il campo B è diventato nullo (o costante).

$$f = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}\,[B(t)NS] = -\frac{d}{dt}\left[B_0 e^{-t/\tau}\cdot NS\right] = \frac{B_0NS}{\tau}\,e^{-t/\tau}$$

L'energia dissipata in R sarà:

$$E(R) = \int dE = \int_0^\infty P_R(t)dt = \int_0^\infty \frac{f^2}{R}dt = \int_0^\infty \left(\frac{B_0NS}{\tau}\right)^2 \frac{e^{-2t/\tau}}{R}dt = \frac{[B_0NS]^2}{2R\tau} = \frac{\left[8\cdot 100\cdot 10^{-3}\right]^2}{2\cdot 1{,}0\cdot 0{,}1} = \frac{64\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-1}} = 3{,}2\,J$$

L'energia dissipata in R scalda la massa di acqua: $\mathrm{Q} = \mathrm{mc}\Delta\mathrm{T} \rightarrow\ \Delta\mathrm{T} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{mc}} = \frac{3{,}2\ \mathrm{J}/(4{,}18\ \mathrm{J}/cal)}{10\ \mathrm{g}\cdot 1\ \mathrm{cal}/\mathrm{g\cdot K}} \cong \frac{3}{4}\frac{1}{10} = 0{,}075\ \mathrm{K}$