Esercizio n.1 [10 punti]

Lungo l'asse verticale di un sottile disco isolante di raggio *R* e ad una certa distanza *d* da esso è posta, nel vuoto, una particella di massa *m* e carica *q*. Sul disco è uniformemente distribuita una carica *Q*. Determinare la minima velocità che è necessario imprimere alla particella, nella direzione dell'asse, perché questa possa raggiungere il disco. Al centro del disco c'è un piccolo foro circolare di superficie trascurabile che non influisce sulla distribuzione totale della carica del disco. Si trascuri la forza peso.

Dati: R = 3 cm, d = 4 cm, $q/m = 5 \cdot 10^7$ C/Kg, $Q = 10^{-9}$ C

Soluzione

In elettrostatica le forze elettriche hanno natura conservativa; è quindi possibile introdurre una funzione energia potenziale $U = qV$ ed imporre il principio di conservazione dell'energia nel passaggio dal punto iniziale *A* al punto finale *B*:

$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \text{T essendo l'energia cinetica della particella}$$

La particella parte in *A* con la velocità minima cercata v_A, si muove di moto rettilineo (non uniforme!!!) lungo l'asse del disco per fermarsi in *B* ove si ha $v_B = 0$ e $T_B = 0$. Conseguentemente:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{m v_A^2} = \mathrm{U_B} - \mathrm{U_A} = \mathrm{q}\big(\mathrm{V}(0) - \mathrm{V}(d)\big)$$

Calcoliamo la differenza di potenziale fra *B* ed *A,* entrambi sull'asse z. In sostanza si tratta di calcolare il potenziale generato da un disco uniformemente carico in un generico punto *P(z)* sul suo asse a distanza *z* dal disco. Tale potenziale $V(z)$ si ottiene integrando tutti i contributi infinitesimi di potenziale dV prodotti dalla carica dq di una corona circolare nel disco:

$$\mathrm{V(z)} = \int_0^R \mathrm{dV} = \int_0^R k\frac{\mathrm{dq}}{\sqrt{z^2+r^2}} = k\sigma\int_0^R \frac{2\pi r\cdot dr}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big[\sqrt{z^2+R^2} - |z|\Big]$$

Dove $k = 1/4\pi\varepsilon_0$; $dq = \sigma dS$, mentre $\sigma = Q/\pi R^2$ rappresenta la densità di carica superficiale.

Da questa relazione si ricavano $V_A = V(d)$ e $V_B = V(0)$.

Abbiamo quindi:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{m v_A^2} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left[R - \sqrt{d^2+R^2} + d\right] \quad \text{da cui } \mathrm{v_A} = \left[\frac{qQ}{\pi R^2 m\varepsilon_0}\left(R + d - \sqrt{d^2+R^2}\right)\right]^{1/2}$$

e $$\mathrm{v_A} = \left[\frac{5\cdot10^7\cdot10^{-11}}{\pi\, 9\cdot10^{-4}\cdot9\cdot10^{-12}}\left(3+4-\sqrt{16+9}\right)10^{-2}\right]^{1/2} \cong \sqrt{\frac{10\cdot10^7\cdot10^{-13}}{250\cdot10^{-16}}} \cong [4\cdot10^8]^{1/2} = 2\cdot10^4 \;\; m/s$$

Nota: il problema può essere risolto anche calcolando il campo elettrico generato dal disco sull'asse z. Calcolando quindi la forza F=qE…..e calcolando il lavoro fatto da questa forza per portare la carica q dal punto inziale a quello finale. Ma bisogna tener conto che E, e quindi F, non sono costanti lungo l'asse, quindi il lavoro va calcolato integrando il lavoro infinitesimo.

Esercizio n.2 [10 punti]

Si supponga di voler caricare un condensatore ideale C ad una tensione V_0. Questo processo di carica posso compierlo in due modi diversi.

A) Collego al condensatore C un generatore di f.e.m. reale V_0 con resistenza interna r ed aspetto un tempo sufficientemente lungo.

B) Collego al condensatore C un generatore di f.e.m. reale $V_0/2$ con resistenza interna r/2 e aspetto un tempo sufficientemente lungo. Poi aggiungo in serie al primo generatore un altro generatore identico al primo [f.e.m= $V_0/2$, resistenza interna= r/2] ed aspetto un tempo sufficientemente lungo.

Valutare in quale delle due modalità l'energia erogata dal generatore sia minore, oppure se i due processi siano identici da questo punto di vista.

A) Il lavoro fatto dal generatore è quello necessario per portare una carica Q attraverso la differenza di potenziale ΔV presente ai capi del generatore.

Quindi: $E_G^A = Q \cdot \Delta V = CV_0 \cdot V_0 = CV_0^2$

B1) Come il caso A, solo che il generatore ha una d.d.p. $V_0/2$.

$$\text{Quindi } E_G^{B1} = Q^{B1} \cdot \Delta V = {CV_0}/{2} \cdot {V_0}/{2} = {CV_0^2}/{4}$$

B2) La carica trasportata è quella necessaria per portare la d.d.p. ai capi del condensatore da $V_0/2$ a V_0.

$$\text{Quindi:} \quad Q^{B2} = C \cdot \Delta V^{B2} = {CV_0}/{2}$$

Mentre i generatori devono trasportare questa carica attraverso la d.d.p. totale V_0 , quindi:

$$E_G^{B2} = Q^{B2} \cdot V_0 = {CV_0}/{2} \cdot V_0 = \frac{CV_0^2}{2}$$

In totale l'energia erogata nel caso B sarà

$$E_G^B = \frac{CV_0^2}{4} + \frac{CV_0^2}{2} = \frac{3}{4} CV_0^2$$

Quindi l'energia erogata dal generatore è minore nel caso B.

Nota 1: Il problema può essere risolto anche calcolando, per ogni modalità di carica, la somma dell'energia dissipata nella resistenza (per un tempo infinito) più quella depositata nel condensatore. Il risultato ovviamente è identico.

A) Energia dissipata in r: $I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$; $I_0 = \frac{V_0}{r}$; $\tau = rC$; $E_r = \int_0^\infty I^2 \, r dt = \frac{1}{2} CV_0^2$

Energia immagazzinata nel condensatore $E_c = \frac{1}{2} CV_0^2$ quindi $E_r(A) + E_c(A) = CV_0^2 = E_G(A)$

B1) come sopra ma con $V=V_0/2$, e r/2 (ma il risultato è indipendente da r) sia ha: $E_G(B1) = CV_0^2/4$

B2) La corrente è $I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$; $I_0 = \frac{V_0/2}{r}$; $\tau = rC$ quindi $E_r(B2) = \int_0^\infty I^2 \, r dt = \frac{1}{8} CV_0^2$

Mentre l'energia immagazzinata in questa parte è $E_f - E_i = \frac{CV_0^2}{2} - \frac{CV_0^2}{8} = \frac{3CV_0^2}{8}$

Quindi in totale nel processo B2 si ha $E \quad (B2) = 3CV_0^2/8 + CV_0^2/4 = \frac{1}{2} CV_0^2$

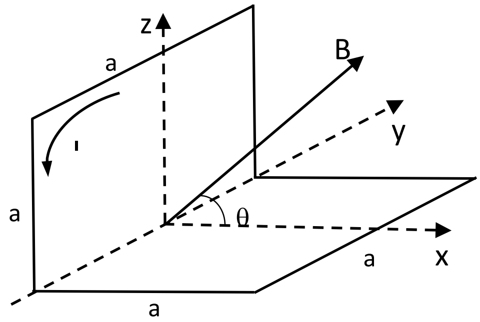
Per i due processi B1+B2 ho: $E^B = \frac{CV_0^2}{4} + \frac{CV_0^2}{2} = \frac{3}{4} CV_0^2 = E_G(B)$ …come trovato precedentemente.

Nota 2: Il problema si può risolvere anche integrando, per ogni modalità, l'energia fornita dal generatore : $E_G = \int_0^\infty f \cdot I(t) \, dt$ dove f è la f.e.m. del generatore e I(t) la corrente che attraversa tutto il circuito, che sarà sempre della forma $I(t) = I_0 \, exp(-t/\tau)$, in cui I_o è la corrente iniziale erogata dal generatore e τ=RC la costante di tempo…il risultato è identico a quello calcolato con le altre modalità. Il risultato è sempre indipendente dalla resistenza del circuito.

A) $I_0 = {V_0}/{r}$; $f = V_0$ B1) Come A, ma con $f = V_0/2$ B2) come A, ma con $I_0 \rightarrow V_0/2r$; $f = V_0$

Esercizio n.3 [10 punti]

Una spira rettangolare di lati [a,2a] viene piegata ad angolo retto in corrispondenza dell'asse mediano del lato maggiore. La spira può ruotare intorno a questo asse (asse y, vedi figura). Nello spazio è presente un campo B costante ed uniforme situato nel piano (x,z) e che forma un angolo θ con l'asse delle x. La spira è percorsa da una corrente I costante; determinare la/le posizione/i della spira rispetto al campo B in cui il momento meccanico agente su di essa è massimo.



Soluzione

La spira rettangolare può essere descritta come la somma di due spire quadrate di lato a, entrambe percorse dalla corrente I in senso antiorario. Il lato in comune ***a***, lungo l'asse y, verrebbe infatti percorso da due correnti uguali e contrarie, descrivendo correttamente il sistema fisico.
Il momento meccanico che agisce sul sistema è: $\bar{M} = \bar{m} \times \bar{B}$ in cui $\bar{m}$, il momento magnetico totale del sistema, può quindi essere scritto come: $\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 = a^2 I\, \hat{x} + a^2 I\, \hat{z}$

I modo:
Il vettore B può essere scritto come: $\bar{B} = B(\cos\theta \cdot \hat{x} + \sin\theta \cdot \hat{z})$, il prodotto vettoriale sarà quindi:

$$\bar{M} = a^2 IB \cdot [\hat{x} + \hat{z}] \times [\cos\theta \cdot \hat{x} + \sin\theta \cdot \hat{z}] = a^2 IB(-\sin\theta \cdot \hat{y} + \cos\theta \cdot \hat{y}) = a^2 IB(-\sin\theta + \cos\theta)\hat{y}$$

Bisogna cercare quindi i punti in cui la funzione $(-\sin\theta + \cos\theta)$ ha intensità massima.

Il momento ha intensità massima nei punti in cui: $\frac{\partial}{\partial\theta}(-\sin\theta + \cos\theta) = 0$,
cioè quando: $-\sin\theta - \cos\theta = 0$, oppure se: $\sin\theta = -\cos\theta$, che avviene nei punti $\theta_1 = 135^0 = \frac{3}{4}\pi$ e: $\theta_2 = -45^0 = -\frac{\pi}{4}$,
Dalla derivata seconda $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(-\sin\theta + \cos\theta) = -\cos\theta + \sin\theta$, calcolata in θ_1 e θ_2 si vede che in θ_1 la funzione ha un minimo relativo, mentre in θ_2 la funzione ha un massimo relativo.

II modo:
Il vettore $\bar{m}$ ha le due componenti x e z uguali, quindi fa un angolo α=45^0 con l'asse delle x, il prodotto vettoriale con il campo B sarà quindi: $\bar{M} = \bar{m} \times \bar{B} = mB\ \sin(\alpha - \theta)\ \hat{y} = mB\ \sin\left({}^{\pi}/_{4} - \theta\right)\ \hat{y}$ che ha un massimo se ${}^{\pi}/_{4} - \theta = \pm{}^{\pi}/_{2}$.
Da cui si trovano i due valori di θ: $\theta_1 = -{}^{\pi}/_{4}$; $\theta_2 = {}^{3\pi}/_{4}$

III modo:
Si possono anche calcolare le forze agenti su tutti i lati tramite la $\bar{F} = I\,\bar{l} \times \bar{B}$ e poi calcolando il momento delle singole forze $\bar{M} = \sum \overline{M_i} = \sum(\bar{r} \times \bar{F})$. E' leggermente più difficile della modalità precedente, bisogna fare attenzione ai versi, ma il risultato è lo stesso.

Grafico della funzione $\cos\theta - \sin\theta$ (Il problema non lo richiedeva)