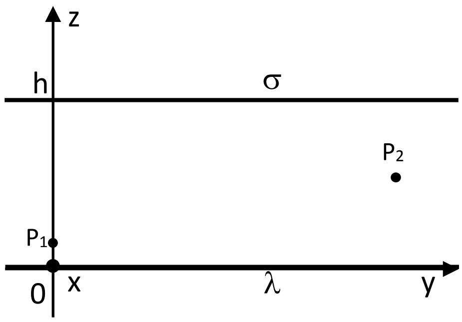
Esercizio n.1 [10 punti]

Nello spazio vuoto, in assenza di gravità, sono presenti due sistemi carichi. Un piano isolante infinito, paralllelo al piano (x,y), che interseca l'asse z nel punto h, su cui è distribuita una carica elettrica con densità costante σ; un filo isolante infinito, disposto lungo l'asse y, su cui si trova una distribuzione di carica elettrica con densità costante λ.

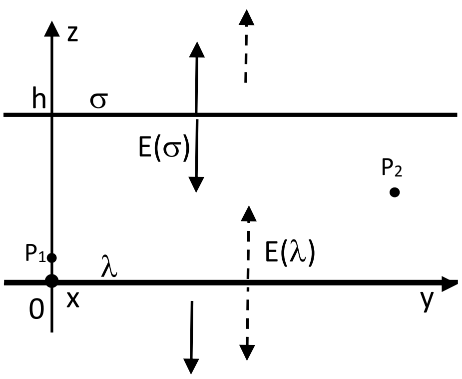
A) Supponendo che nel sistema si trovi un elettrone dotato di una velocità $v=(0,v_y,0)$, determinare la quota z (z>0) a cui si deve trovare perché la sua velocità rimanga costante.

B) Supponiamo ora che un protone si trovi nel punto $P_1(y_1,z_1)$, e dopo un certo tempo nel punto $P_2(y_2, z_2)$; determinare la variazione della sua energia cinetica fra i due punti 1 e 2.



Dati: σ = 100 nC/m^2 ; λ= 3π nC/m ; h = 10 cm ; $z_2 = 2\,z_1$
z_1= 2 cm.

Soluzione



A) La velocità dell'elettrone rimarrà costante se non agiranno forze esterne su di esso, quindi se i campi elettrici generati dai due sistemi – in ogni caso in direzione z - avranno risultante nulla.

Per z>h e z<0 i campi generati dai due sistemi hanno lo stesso verso, quindi la loro somma non può essere nulla.

Per 0<z<h si ha: $E(z) = E(\sigma) + E(\lambda) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 z}$ che vale 0 per $z^* = \frac{\lambda}{\sigma\pi} = \frac{3\pi\, 10^{-9}}{10^2\, 10^{-9}\, \pi} = 0{,}03\ m = 3\ cm$

B) La variazione di energia cinetica sarà uguale al lavoro fatto dal campo elettrico sul protone:

$\Delta E_c = \Delta L = -q\Delta V = -q[V(z_2) - V(z_1)]$; il potenziale sarà:

$$V(z) = -\int \bar{E}(z)\cdot\overline{dz} = -\int\left[-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 z}\right]dz = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[z - \frac{\lambda}{\sigma\pi}\ln z\right] + c = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[z - z^*\ \ln z] + c$$

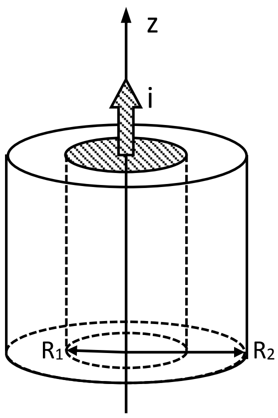
La differenza di potenziale ΔV, passando da P_1 a P_2 sarà, considerando che $z_2 = 2\,z_1$:

$\Delta V = [V(z_2) - V(z_1)] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[z_1 - z^*\ \ln 2]$ quindi : $\Delta E_c = -q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[z_1 - z^*\ \ln 2] \cong -\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}[2\ 10^{-2} - 3\ 10^{-2}\ \cdot 0{,}69] \cong 0$

…volendo fare il calcolo esatto si ha: $\Delta E_c = 7\ 10^{-19}\ J$ J. Sono accettati come corretti entrambi valori.

Esercizio n.2 [10 punti]

Un sistema è composto da un conduttore cilindrico infinito di raggio R_1 percorso da una corrente costante i, con intorno una corona cilindrica infinita di permeabilità magnetica relativa μ_r e raggi interno ed esterno R_1 e R_2. Determinare i valori dei vettori B, H ed M in tutto lo spazio (in modulo e direzione). Fare un grafico dell'andamento qualitativo delle funzioni H(r) e M(r) in tutto lo spazio.



Dati: R_1 = 1cm ; R_2 = 2 cm ; i = 6,28 A ; μ_r = 1,5

Nota: il valore di 1,5 per μ_r non è un valore usuale, viene dato solo per semplificare i calcoli.

Soluzione

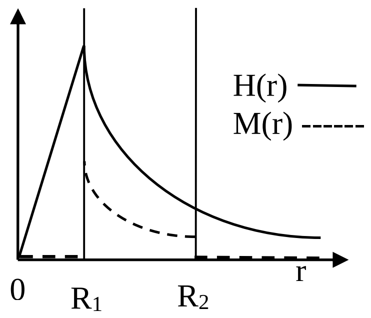
Il campo H si può calcolare dalla sua circuitazione su di una circonferenza di raggio r, considerando che H sarà tangenziale a questa circonferenza: $\oint \overline{H}(r) \cdot d\overline{r} = i_c(r)$; i_c essendo le correnti concatenate all'interno della circonferenza di raggio r.

Da questa si può calcolare $H(r) = \frac{i_c(r)}{2\pi r}$. Nelle tre zone dello spazio si ha:

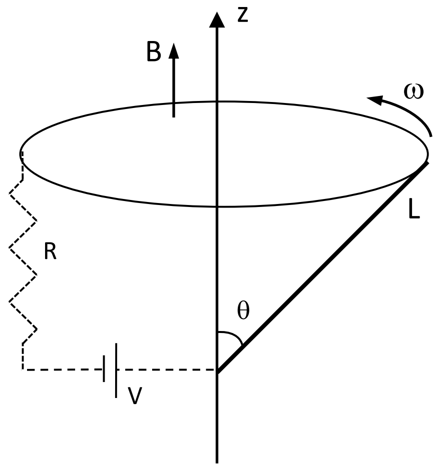
$0 \le r \le R_1$: $i_c(r) = i\frac{\pi r^2}{\pi R_1^2}$; $\mu_r = 1$; $H(r) = i\frac{r}{2\pi R_1^2} = r \cdot 10^4\ A/m$; $B(r)=\mu_0 H(r)$; $M(r) = \chi \cdot H(r) = (\mu_r - 1)H(r) = 0$

$R_1 \le r \le R_2$: $i_c = i$; $\mu_r = 1{,}5$; $H(r) = \frac{i}{2\pi r} = \frac{1}{r}\ A/m$; $B(r) = \mu_r \mu_0 \frac{i}{2\pi r}$; $M(r) = (\mu_r - 1)\frac{1}{r} = \frac{1}{2r}\ \frac{A}{m}$

$r \ge R_2$: $i_c = i$; $\mu_r = 1$; $H(r) = \frac{i}{2\pi r} = \frac{1}{r}\ A/m$; $B(r) = \mu_0 \frac{i}{2\pi r}$; $M(r) = \chi \cdot H(r) = (\mu_r - 1)H(r) = 0$



Esercizio n.3 [10 punti]



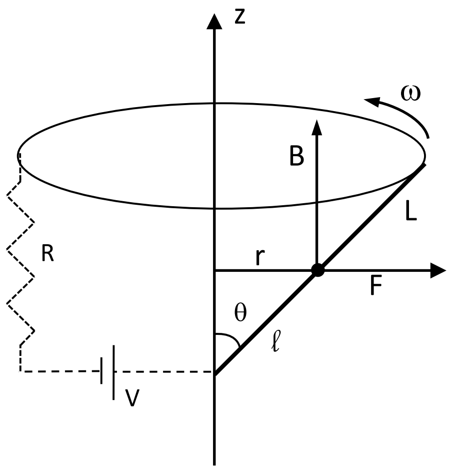
Una sbarretta conduttrice rigida lunga L viene fatta ruotare da un motore esterno con velocità angolare costante ω intorno ad un asse verticale z (vedi disegno). In tutto lo spazio è presente un campo B costante in direzione dell'asse z.

A) Determinare la differenza di potenziale che si crea fra i due estremi della sbarretta. Si consiglia di utilizzare l'espressione della forza di Lorentz per rispondere a questa domanda. B) Si supponga ora che il motore venga disconnesso, e che la sbarretta venga collegata ad un circuito chiuso in cui sono presenti un generatore di tensione V ed una resistenza R (parte tratteggiata della figura). La sbarretta inizierà a ruotare, si scriva l'equazione del circuito necessaria per calcolare la corrente che scorre nella sbarretta a regime. Si trascurino le resistenze della sbarretta e dell'anello, e l'induttanza del circuito.

.

Dati: L= 10 cm ; ω = 10 rad/s ; θ = 45^0 ; B= 3 T

Soluzione



A1) La forza di Lorentz sulla carica generica q nella sbarretta è:
$\overline{F} = q\,\overline{v} \times \overline{B} = qvB\ (\perp \hat{z})$ (in direzione perpendicolare all'asse z) ;
$F(lungo\ L) = F \sin\theta\ \ \hat{L}$, da cui il campo E lungo L sarà:
$E_L = \frac{F_L}{q} = vB\sin\theta = \omega r B \sin\theta = \omega \cdot l \sin\theta \cdot B \cdot \sin\theta = \omega \cdot l (\sin\theta)^2 B \cdot \sin\theta$
La d.d.p. si ha integrando il campo E lungo L: $\Delta V = -\int_0^L \omega \cdot l \sin^2\theta \cdot B\, dl = -\frac{1}{2}\omega L^2 \sin^2\theta \cdot B$ = -75 mV.

A2) Volendo utilizzare la legge di induzione di Faraday Neumann è necessario fare attenzione a scegliere la corretta superficie infinitesima che taglia il campo. Se si sceglie infatti la superfricie descritta dalla sbarretta L che ruota, di area $dS = L \cdot L d\alpha$, bisogna considerare che la normale a quasta superficie non sarà parallela a ω, quindi $d\alpha/dt \neq \omega$. Per fare il calcolo corretto o si proietta $d\alpha/dt$ in direzione di ω, oppure si proietta la lunghezza L in direzione radiale. In questo caso la superficie infinitesima sarà $dS = R \cdot R d\alpha$ [R indica il raggio della circonferenza su cui ruota l'estremo della sbarretta] da cui considerando che $R = L \sin\theta$ e che $d\alpha/dt = \omega$, inserendo queste grandezze nella relazione $f = -\frac{d\phi}{dt}$ si ottiene la stessa espressione del calcolo A1.

A3) Si può effettuare il calcolo anche considerando che il campo B si muove, dal punto di vista della sbarretta, con velocità v=-ωr. Quindi si può scrivere la trasformazione di Lorentz che trasforma il campo B in movimento, in un campo elettrico E fermo rispetto alla sbarretta:$\overline{E}_{\perp v} = -\overline{v} \times \overline{B}$…il risultato è lo stesso. [Questo tipo di calcolo non fa riferimento al programma svolto nel Corso].

B) L'equazione del circuito sarà: $V + f_i = Ri$; $f_i = \Delta V$ essendo la f.e.m indotta.

Formule varie e costanti: Campo Elettrostatico creato da un filo carico infinito nel vuoto: $E\,(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}$; $\mu_o = 4\pi\ 10^{-7}$; $\varepsilon_o \cong 9\ \ 10^{-12}$ [S.I.] ; ln 2 ≅ 0,69 ; ln3 ≅ 1,1. I valori di π nei calcoli possono essere lasciati indicati; tutti i calcoli possono essere fatti con un'approssimazione del 10%.