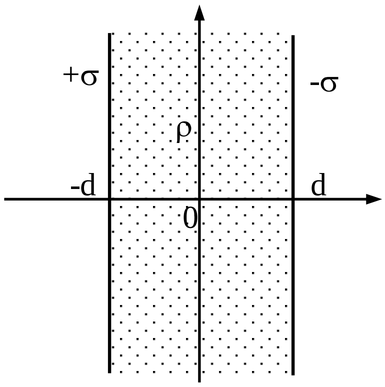
Esercizio n.1 **[11 punti]**



Nello spazio sono presenti due piani infiniti di spessore trascurabile, paralleli fra loro, a distanza 2d, carichi con densità di carica uniforme $+\sigma$ e $-\sigma$ (vedi figura). Tutto lo spazio fra i due piani è riempito da una distribuzione di carica di volume costante ed uniforme $\rho>0$.
Si scrivano le espressioni del campo elettrico e del potenziale elettrostatico nelle tre regioni in cui è diviso lo spazio, ponendo lo zero del potenziale nell'origine. Si faccia anche un disegno di massima dell'andamento di E(x) e di V(x).
Si supponga che il "supporto" per la densità di carica ρ abbia costante dielettrica praticamente uguale a quella del vuoto.
Nei calcoli si ponga $|\sigma|=\rho d$.

Soluzione

Consideriamo le tre zone: la 1 con $x\leq -d$; la 2 con $-d\leq x\leq d$; la 3 con $d\leq x$:

Zona 2) $E_2(+\sigma,-\sigma)=\sigma/\varepsilon_0$; $E_2(\rho)$ la posso calcolare applicando il teorema di Gauss ad una superficie chiusa circolare con l'asse lungo la x, centrata in x=0, di lunghezza 2x, e superficie laterale S:

$$\emptyset(E)=2\,E(x)\cdot S=\frac{Q(interna)}{\varepsilon_0}=\frac{\rho\cdot S\cdot 2x}{\varepsilon_0}\quad da\ cui\colon E_2(\rho)=\frac{\rho\cdot x}{\varepsilon_0}$$

Il campo E_2 totale sarà quindi $E_2=E_2(\pm\sigma)+E_2(\rho)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}+\frac{\rho\cdot x}{\varepsilon_0}=\frac{\rho d}{\varepsilon_0}+\frac{\rho\cdot x}{\varepsilon_0}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,(d+x)$

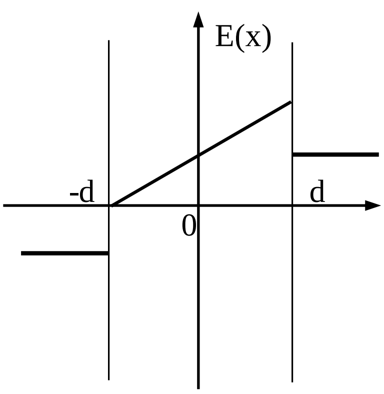
Il potenziale sarà $V_2(x)=-\int_c^x E_x\,dx=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(d\cdot x+\frac{x^2}{2}\right)+c$; imponendo che V(0)=0 si ha c=0.

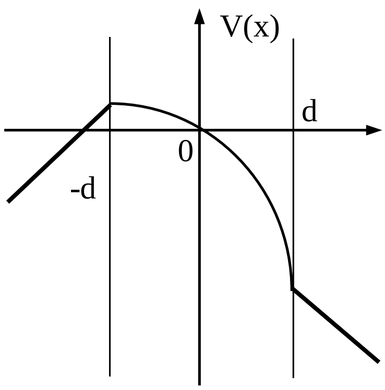
Quindi $V_2(x)=\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\left(-x-\frac{x^2}{2d}\right)$, è una parabola con la concavità verso il basso, e asse lungo x=-d.

Zona 3) $E_3(+\sigma,-\sigma)=0$; $E_3(\rho)$: il calcolo è analogo a quello fatto nella zona 2), ma la carica ora è limitata alla zona -d, d; si ha quindi $E_3(\rho)=\quad E_3=\frac{\rho\cdot d}{\varepsilon_0}$; il potenziale sarà: $V_3(x)=-\int_{c1}^x E_x\,dx=-\frac{\rho dx}{\varepsilon_0}+c1$ imponendo la continuità con la zona 2 nel punto x=d avrò: $\mathrm{V_3(d)=V_2(d)}$, cioè $-\frac{\rho d^2}{\varepsilon_0}+c1=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(d^2+\frac{d^2}{2}\right)$ da cui ho $c1=-\frac{\rho\cdot d^2}{2\varepsilon_0}$ e $V_3(x)=\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\left(-\frac{d}{2}-x\right)$

Zona 1) $E_1(+\sigma,-\sigma)=0$; $E_1(\rho)$: il calcolo è analogo a quello fatto nella zona 2), ma la carica ora è limitata alla zona -d, d; si ha quindi $E_1(\rho)=\quad E_1=-\frac{\rho\cdot d}{\varepsilon_0}$; il potenziale sarà: $V_1(x)=-\int_{c2}^x E_x\,dx=\frac{\rho dx}{\varepsilon_0}+c2$ imponendo la continuità con la zona 2 nel punto x=-d avrò: $\mathrm{V_1(-d)=V_2(-d)}$, cioè $-\frac{\rho d^2}{\varepsilon_0}+c1=-\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2}\right)$ da cui ho $c2=-\frac{3\rho\cdot d^2}{2\varepsilon_0}$ e $V_1(x)=\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\left(\frac{3d}{2}+x\right)$

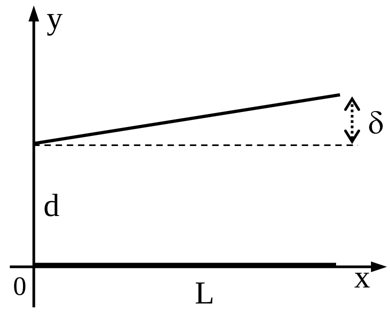
I grafici del campo elettrico e del potenziale sono:





Esercizio n.2 **[10 punti]**

Nello spazio vuoto si ha un condensatore piano formato da due armature quadrate di lato L, leggermente inclinate una rispetto all'altra, in modo tale che $\delta \ll d$ (vedi figura). Calcolare il valore della capacità del condensatore formato dalle due armature in funzione della capacità C_0 del condensatore che si ha quando $\delta=0$.
Calcolare inoltre il lavoro necessario per portare l'armatura superiore parallela a quella inferiore, cioè con $\delta=0$, nell'ipotesi che il condensatore sia stato caricato con una carica Q costante. Si supponga che le linee del campo E all'interno del condensatore siano dirette sempre lungo l'asse y.
Nota: il disegno non è in scala.



Dati: $\delta/d = 0,1$; $C_0 = 0,5\ \mu F$; $Q = 10^{-4}$ C.

Relazioni utili: $\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2}$; $\frac{1}{1\pm x} \cong 1 \mp x$

Soluzione

Il condensatore si può calcolare come la somma dei condensatori infinitesimi dC di lati (L, dx) e distanza d+h(x)

Si assume sen$\alpha \cong$ tg$\alpha \cong \delta/L$

δ/L dove α è l'angolo che il lato inclinato forma con l'asse delle x.

$dC = \varepsilon_0 \frac{L\,dx}{d + x\tan\alpha} \cong \varepsilon_0 \frac{L\,dx}{d + x\tan\alpha} \cong \varepsilon_0 \frac{L\,dx}{d + x\delta/L}$ integrando fra x=0 e x=L si ha $C = \int dC = \int_0^1 \varepsilon_0 \frac{L\,dx}{d + x\delta/L} = \frac{\varepsilon_0 L^2}{\delta} \ln(1 + \frac{\delta}{d}) \cong \frac{\varepsilon_0 L^2}{\delta}(\frac{\delta}{d} - \frac{\delta^2}{2d^2}) = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}(1 - \frac{\delta}{2d}) = C_0(1 - \frac{\delta}{2d}) = 0,47\ \mu F$

Metodi alternativi: Si può considerare la parte inclinata di spessore $\delta(x)$ utilizzando il suo valore medio (si può fare perché il tratto inclinato è rettilineo, o se si vuole, l'equazione di $\delta(x)$ è una retta, in questo modo si ha che il valor medio è $\delta/2$, e la capacità corrispondente: $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d + \delta/2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{1}{1 + \delta/2d} \cong C_0\,(1 - \delta/2d)$

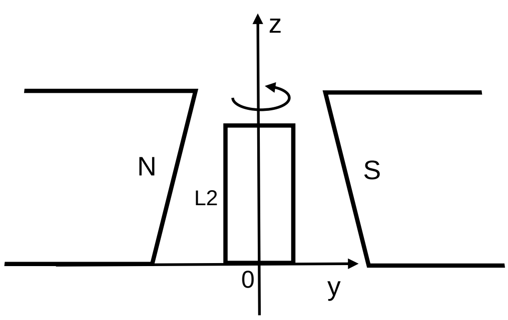
Oppure anche come capacità serie (attenzione, non parallelo) della capacità C_0 (d) con la capacità dovuta alla parte inclinata, calcolata sempre per un valor medio $\delta/2$

Il lavoro fatto sarà uguale alla differenza fra l'energia finale e l'energia iniziale:

$L = U_f - U_i = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_0} - \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = -U_f \frac{\delta}{2d} = -0,5\ mJ$, il lavoro è negativo, quindi dall'esterno viene assorbita energia.

Esercizio n.3 **[9 punti]**

Si consideri un magnete sagomato in modo da generare un campo B diretto secondo l'asse y, e variabile lungo l'asse z secondo la legge $B_y(z) = az$. Fra le espansioni del magnete è presente una spira conduttrice rettangolare, di lati L1 e L2 e resistenza R che può ruotare intorno all'asse z (vedi figura). Calcolare la potenza media necessaria per far ruotare la spira di moto circolare uniforme con una velocità angolare ω.



Dati: a= 10 T/m ; L1= 2 cm ; L2= 5 cm ; R = 2,5 Ω ; $\omega = 10^3$ rad/s

Soluzione

Nella spira circolerà una corrente ***i*** dovuta alla f.e.m. indotta dalla rotazione della spira nel campo B.

$f(t) = -\frac{d\phi(B)}{dt}$ a causa della rotazione della spira la sua normale ruota con legge del tipo cos ωt, quindi:

$$\phi(t) = \phi_{max}\ \cos\omega t$$

Il flusso non è costante sulla superficie, quindi va calcolato integrando un flusso elementare:

$$\phi_{max} = \int_S\ d\phi = \int_S\ B(z)L_1 dz = \int_0^{L_2} az\ L_1\ dz = \frac{1}{2}\ aL_1L_2^2$$

quindi $f(t) = \omega\ \phi_{max}\ \sin\omega t$; $i(t) = \frac{f(t)}{R} = \frac{\omega\ \phi_{\max}\ \sin\omega t}{R}$

e: $P(t) = i^2(t)R = \frac{(\omega\ \phi_{max}\ \sin\omega t\ )^2}{R}$; $< P > = \frac{P(t)max}{2} = \frac{(\omega\ \phi_{max}\ )^2}{2R} = \frac{\left(\omega\ aL_1L_2^2\right)^2}{8R} = 12{,}5\ mW$