

Cinematica Relativistica

riccardo.paramatti@roma1.infn.it

23 marzo 2009

1 Richiami sulla Relatività Ristretta

I principi sui quali si fonda la Teoria della Relatività Ristretta sono i seguenti:

- qualunque esperimento fornisce gli stessi risultati se eseguito in due sistemi di riferimento dei quali uno sia in moto rettilineo ed uniforme rispetto all'altro; in altre parole le leggi della fisica sono le stesse in ogni riferimento inerziale,
- l'energia, la quantità di moto totale ed il momento angolare totale di un sistema fisico isolato sono costanti nel tempo,
- la velocità con cui si propaga nel vuoto la luce, così come ogni onda elettromagnetica, è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale e vale¹:

$$c = 299792458 \text{ m/s} \quad (1)$$

questa velocità è un limite insuperabile,

- il tempo non è un invariante relativistico.

I primi due sono principi su cui si basa anche la meccanica classica; nella relatività ristretta, la conservazione dell'energia assume, in virtù dell'equivalenza tra massa ed energia, un significato più generale. In meccanica classica vale anche il principio di relatività associato alle trasformazioni di Galileo ed il principio di invarianza del tempo rispetto al sistema di riferimento.

Le trasformazioni di Galileo vengono sostituite, nella meccanica relativistica, dalle trasformazioni dello spazio-tempo di Lorentz (richiamate nel paragrafo 3) che si riducono, come vedremo, alle trasformazioni di Galileo nel limite $v \ll c$.

¹Il valore di c è privo di errore; il metro, dal 1983, è definito come *la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299792458 di secondo*.

2 Notazioni

Un quadrivettore \mathbf{A} è definito dalle sue quattro componenti:

$$\mathbf{A} = [a_0, a_1, a_2, a_3] = [a_0, \vec{a}] \quad (2)$$

In questa notazione si è evidenziata la separazione tra la prima componente del quadrivettore (componente temporale) dalle altre 3 (componenti spaziali); ad esempio la prima componente del quadrimpulso di una particella è la sua energia, mentre le altre tre rappresentano la quantità di moto.

La metrica dei quadrivettori utilizzata nel seguito non è una metrica Euclidea, bensì di Minkowski. Il prodotto tra due quadrivettori è dato dal prodotto delle componenti temporali dei due quadrivettori meno i 3 prodotti delle rispettive componenti spaziali, vale a dire:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (3)$$

3 Trasformazioni di Lorentz

Dati due sistemi di riferimento inerziali ($Oxyz$ e $O'x'y'z'$) in moto relativo tra di loro, si assuma per semplicità che i loro assi siano coincidenti a due a due al tempo $t = t' = 0$ e che il moto sia traslatorio uniforme lungo l'asse x ; si definiscono quindi $\beta = v_x/c$, con v_x velocità di O' rispetto a O , e $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Applicando una trasformazione di Lorentz $L(\beta)$ ad un quadrivettore \mathbf{A} nel sistema di coordinate $Oxyz$, si ottiene \mathbf{A}' , l'espressione del quadrivettore nel sistema $O'x'y'z'$:

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a_0 - \beta\gamma a_1 \\ -\beta\gamma a_0 + \gamma a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Nel caso del quadrivettore posizione, definito come $\mathbf{X} = [ct, x, y, z]$ affinché tutte le componenti abbiano le dimensioni fisiche di una lunghezza, si ha:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (5)$$

Se la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento è molto minore della velocità della luce ($\beta \ll 1$ e quindi $\gamma \simeq 1 + \beta^2/2$), si riottengono al prim'ordine in β le trasformazioni di Galileo e l'invarianza del tempo:

$$\begin{aligned} ct' &\simeq (1 + \beta^2/2)(ct - \beta x) \implies t' \simeq t + \beta^2(t/2 - x/v_x) \simeq t \\ x' &\simeq (1 + \beta^2/2)(x - \beta ct) \simeq x - v_x t \end{aligned}$$

L'espressione generale delle relazioni (5), nel caso in cui la direzione del moto del sistema $O'x'y'z'$ rispetto al sistema $Oxyz$ non sia lungo un particolare asse di riferimento ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$), diventa:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} &= \gamma(x_{\parallel} - \beta ct) \\ \vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp} \end{aligned} \tag{6}$$

dove $x_{\parallel} = \vec{x} \cdot \vec{\beta} / \beta$ è la proiezione di $\vec{x} = [x, y, z]$ lungo la direzione del moto e \vec{x}_{\perp} è la proiezione sul piano perpendicolare.

La trasformazione di Lorentz (4) è una rotazione nello spazio-tempo; il determinante della matrice di Lorentz L è dato da $\det(L) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ e inoltre $L^{-1}(\beta) = L(-\beta)$. La trasformazione inversa $\mathbf{A} = L^{-1}(\beta) \cdot \mathbf{A}' = L(-\beta) \cdot \mathbf{A}'$ è quindi:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a'_0 + \beta\gamma a'_1 \\ \beta\gamma a'_0 + \gamma a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Il prodotto tra due quadrivettori, così come il prodotto di un quadrivettore per se stesso, è un invariante relativistico; infatti applicando una trasformazione di Lorentz:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' &= a'_0 b'_0 - a'_1 b'_1 - a'_2 b'_2 - a'_3 b'_3 = \\ &= \gamma^2(a_0 - \beta a_1)(b_0 - \beta b_1) - \gamma^2(a_1 - \beta a_0)(b_1 - \beta b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)(a_0 b_0 - a_1 b_1) - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \tag{8}$$

Un esempio di invariante di Lorentz è il prodotto del quadrivettore spostamento infinitesimo $[cdt, dx, dy, dz]$ per se stesso:

$$d\mathbf{S}^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{9}$$

che viene anche indicato come $d\tau^2$ se pensato nel sistema di riferimento nel quale la parte spaziale dello spostamento è nulla.

Conseguenza delle trasformazioni di Lorentz sono:

- Contrazione delle lunghezze.

Si consideri una sbarra solidale con il sistema di riferimento $O'x'y'z'$ e disposta parallelamente all'asse x' , e si supponga il sistema $O'x'y'z'$ in moto rettilineo ed uniforme, lungo l'asse x , rispetto al sistema $Oxyz$; la lunghezza misurata in O' è pari a $L' = x'_2 - x'_1$ che, applicando la trasformazione di Lorentz, equivale a $L' = \gamma(x_2 - x_1) - \beta c\gamma(t_2 - t_1)$, con x_2, x_1, t_1 e t_2 grandezze relative ad un osservatore che misura la lunghezza della sbarra nel sistema $Oxyz$. Questo osservatore però, vedendo la sbarra in movimento rispetto al suo riferimento, deve misurarne i due estremi contemporaneamente cioè $t_2 = t_1$ e quindi $L' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$. Si conclude che un oggetto in moto rispetto ad un osservatore risulta contratto ($L < L'$) nella direzione del moto rispetto a quanto misurato da un osservatore solidale con l'oggetto.

- Dilatazione dei tempi.

Sia $T' = t'_2 - t'_1$ l'intervallo di tempo tra due eventi che accadono nello stesso punto del sistema di riferimento $O'x'y'z'$. Un osservatore solidale con il sistema $Oxyz$ misura $T = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) + \beta\gamma(x'_2 - x'_1)/c$; essendo $x'_2 = x'_1$, si ha che $T = \gamma T'$. Un evento visto da un osservatore in movimento rispetto all'evento stesso ha una durata maggiore dello stesso evento osservato nel suo sistema di riferimento. Il tempo misurato nel sistema di riferimento solidale con un oggetto in movimento è definito *tempo proprio* ed è indicato con τ .

Un esempio caratteristico di contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi è rappresentato dal muone, particella elementare instabile con i numeri quantici dell'elettrone ma molto più pesante, che ha una vita media $\tau_\mu \simeq 2.2 \mu s$. I raggi cosmici abbondano di muoni che, prodotti nel decadimento di altre particelle negli strati superiori dell'atmosfera terrestre, arrivano fino al suolo, dopo aver percorso molti chilometri, ad una velocità prossima a quella della luce senza decadere nel tragitto. Dal punto di vista del muone, la lunghezza percorsa, cioè lo spessore di atmosfera attraversata, si è contratto di un fattore $1/\gamma$, perchè quest'ultima è in movimento rispetto ad esso; la lunghezza del percorso dal punto di vista del muone è infatti minore² di $c\tau_\mu \simeq 660$ m. Per l'osservatore solidale con la terra invece, la vita media del muone si è dilatata di un fattore γ diventando molto maggiore dei

² $c\tau$ è un limite superiore alla distanza percorsa da una particella in un tempo τ e quindi, nella visione classica di tempo invariante, alla distanza media percorsa da una particella, con vita media τ , prima di decadere. A causa della dilatazione dei tempi e dunque anche della vita media, la distanza media percorsa prima di decadere dipende però dal sistema di riferimento ed è pari a $c\tau$ solo nel riferimento in cui $p = mc$ (si dimostri questa affermazione dopo aver letto il paragrafo 5).

2.2 μs , permettendogli quindi di arrivare al suolo prima di decadere; l'orologio solidale con il muone, che misura il tempo proprio del muone, scorre molto più lentamente dell'orologio dell'osservatore.

4 Cono di luce e simultaneità di due eventi

Consideriamo il diagramma spazio-temporale di figura 1; abbiamo omesso per semplicità gli assi y e z ma le considerazioni seguenti valgono anche se si considera un diagramma tridimensionale o quadridimensionale.

Ogni punto del piano xt (o dello spazio xyt o dell'iperspazio $xyzt$) rappresenta un evento puntuale, cioè un evento che accade in un dato luogo e in un preciso istante; il luogo dei punti $t=0$ vale a dire i punti della retta x (o del piano xy o dell'iperpiano xyz) rappresentano il presente. Un corpo che si muove nello spazio-tempo descrive una traiettoria o *linea di universo*; nella figura è riportata una linea di universo passante per l'origine. Un raggio di luce emesso nel punto $x=0$ all'istante $t=0$, viaggiando alla velocità della luce è rappresentato da $(ct)^2 - x^2 = 0$, quindi dalle due bisettrici del piano; in tre dimensioni si ha un cono (da qui la definizione di *cono di luce*) ed in quattro un ipercono.

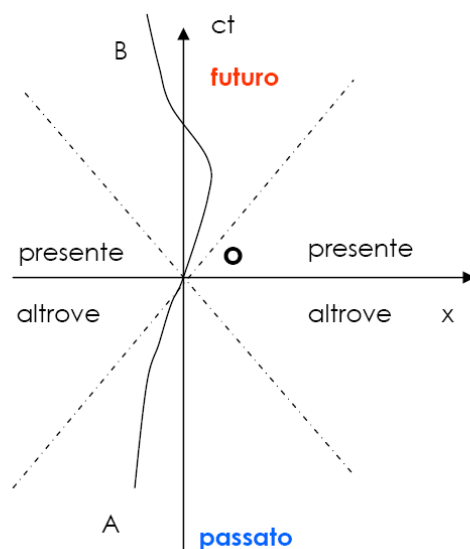


Figura 1: Piano xt degli eventi; sono rappresentati il cono di luce passante per l'origine ed una possibile linea di universo passante anch'essa per l'origine.

Analogamente, un raggio di luce che passa per l'origine, necessariamente è stato emesso in un punto, del semipiano $t < 0$, appartenente al cono di luce, rappresentato in figura dalla linea tratteggiata.

Dati due eventi $P_1 = (t_1, \vec{x}_1)$ e $P_2 = (t_2, \vec{x}_2)$ dello spazio-tempo, la *distanza invariante* che li separa è definita come:

$$S_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 \quad (10)$$

Si presentano quindi tre diverse possibilità:

- $S_{12}^2 > 0$: tra i due eventi c'è una separazione di tipo tempo e sono quindi connessi causalmente vale a dire che esiste una linea di universo che li connette uno all'altro. Esiste inoltre una trasformazione di Lorentz ad un nuovo sistema di riferimento nel quale i due eventi coincidono spazialmente ($\vec{x}'_1 = \vec{x}'_2$) ma non temporalmente.
- $S_{12}^2 < 0$: tra i due eventi c'è una separazione di tipo spazio. Questi eventi non sono connessi perchè nessuna linea di universo può metterli in connessione (a meno di violare il limite rappresentato dalla velocità della luce). In questo caso esiste una trasformazione di Lorentz ad un sistema di riferimento nel quale i due eventi si verificano in punti diversi dello spazio ma nello stesso tempo ($t'_1 = t'_2$).
- $S_{12}^2 = 0$: il primo evento si trova sul cono di luce generato dal secondo e viceversa.

Sottolineiamo ancora quanto detto per due eventi separati da una distanza di tipo spazio, e cioè che soltanto in un determinato sistema di riferimento si osservano questi due eventi essere simultanei; questo fatto è in contrapposizione con la meccanica classica, dove la simultaneità di due eventi non dipende dal sistema di riferimento³.

³Illustriamo la perdita di simultaneità con un esempio: si consideri un osservatore posto nell'origine di un sistema di riferimento Oxyz che, ad un dato istante $t = 0$, osserva due eventi A e B, ad esempio l'accensione di due luci, nei punti $\vec{x}_A = [-\alpha, 0, 0]$ e $\vec{x}_B = [\alpha, 0, 0]$, con $\alpha = 2997924580$ metri = 10 secondi-luce. L'osservatore concluderà che i due eventi sono contemporanei ed avvenuti 10 secondi prima.

Si consideri ora un osservatore sull'origine di un sistema $O'x'y'z'$ in moto traslatorio uniforme lungo l'asse x, rispetto ad Oxyz, con $\beta = \frac{3}{5}$; se O' passa per O proprio nell'istante in cui il primo osservatore vede le due luci accendersi, anche il secondo osservatore vedrà le due luci accendersi nello stesso momento, ma concluderà che i due eventi non sono simultanei e che l'evento A ha avuto luogo 5 secondi prima, mentre l'evento B ben 20 (lo si verifichi applicando le trasformazioni di Lorentz dello spazio-tempo). Chiaramente, essendo la velocità della luce pari a c anche in $O'x'y'z'$, le distanze degli eventi A e B, per il secondo osservatore, sono rispettivamente 5 e 20 secondi-luce.

5 Il quadrivettore energia-impulso

Il quadrimpulso (o quadrivettore energia-impulso) è definito come:

$$\mathbf{P} = [E/c, \vec{p}] = [m\gamma c, m\gamma \vec{v}] \quad (11)$$

\mathbf{P} , come tutti i quadrivettori, non è invariante rispetto al sistema di riferimento utilizzato. Il prodotto di un quadrivettore per se stesso è invece, come abbiamo visto, un invariante relativistico; il prodotto del quadrimpulso per se stesso è legato alla massa della particella:

$$\sqrt{\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}} = \sqrt{E^2/c^2 - |\vec{p}|^2} = \sqrt{(m\gamma c)^2 - (m\gamma |\vec{v}|)^2} = m\gamma \sqrt{1 - \beta^2} c = mc \quad (12)$$

da cui la relazione tra massa, impulso ed energia di una particella:

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (13)$$

che spesso è riportata come $E^2 = p^2 + m^2$, avendo indicato con p il modulo di \vec{p} e posto $c=1$.

Dalla definizione di quadrimpulso, seguono le relazioni:

- $\gamma = E/mc^2 = \frac{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2 c^2}}{mc}$
- $\beta = |\vec{p}|c/E$
- $\gamma\beta = |\vec{p}|/mc$
- $K = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$

Nell'ultima relazione si è introdotta l'energia cinetica di una particella, vale a dire la differenza tra l'energia totale e l'energia a riposo; si verifica facilmente come, in regime non relativistico ($\beta \ll 1$), K si riduca all'espressione classica dell'energia cinetica:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 \simeq (1 + \beta^2/2 - 1)mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

6 Sistemi di riferimento e massa invariante

I due sistemi di riferimento più convenientemente utilizzati sono il sistema del laboratorio ed il sistema del centro di massa.

6.1 Sistema del laboratorio

Il sistema di riferimento del laboratorio è solidale con l'osservatore e con i rivelatori; nel caso di una particella contro un bersaglio, quest'ultimo si trova generalmente in quiete rispetto al sistema del laboratorio. Quindi i quadrimpulsi della particella incidente e della particella del bersaglio sono rispettivamente $\mathbf{P}_1 = [E_1/c, \vec{p}_1]$ e $\mathbf{P}_2 = [m_2c, \vec{0}]$; inoltre il quadrimpulso totale vale $\mathbf{P}_{tot} = [E_1/c + m_2c, \vec{p}_1]$.

6.2 Sistema del centro di massa

Il sistema del centro di massa è definito come il sistema nel quale l'impulso totale è nullo, cioè nel quale sono nulle le tre componenti vettoriali della somma dei quadrimpulsi delle particelle interagenti:

$$\sum_k \vec{p}_k = \vec{p}_{tot} = \vec{0} \quad (14)$$

Nel caso di un sistema isolato costituito da due particelle di ugual massa che si muovono una contro l'altra con uguale velocità, come ad esempio in un collider, il sistema del laboratorio coincide con il sistema del centro di massa. Generalmente però i due riferimenti sono differenti.

Si adotta nel seguito la convenzione per la quale una grandezza riferita al centro di massa porta un asterisco come apice. Nel caso precedente di una particella incidente su un bersaglio, i due quadrimpulsi nel centro di massa sono $\mathbf{P}_1^* = [E_1^*/c, \vec{p}^*]$ e $\mathbf{P}_2^* = [E_2^*/c, -\vec{p}^*]$ mentre il quadrimpulso totale è $\mathbf{P}_{tot}^* = [(E_1^* + E_2^*)/c, \vec{0}]$.

6.3 Massa invariante

Si consideri un sistema di N particelle ognuna con quadrimpulso $\mathbf{P}_k = [E_k/c, \vec{p}_k]$ e sia $\mathbf{P}_{tot} = \sum_k \mathbf{P}_k$ il quadrimpulso totale. L'invariante relativistico legato al prodotto di \mathbf{P}_{tot} per se stesso è definito *massa invariante* del sistema di N particelle ed è indicato con \sqrt{s} :

$$\sqrt{s} = \sqrt{c\mathbf{P}_{tot} \cdot c\mathbf{P}_{tot}} = \sqrt{\left(\sum_k E_k\right)^2 - \left|\sum_k \vec{p}_k\right|^2 c^2} = \sum_k E_k^* = E_{tot}^* \quad (15)$$

perchè nel centro di massa, per definizione, l'impulso totale è nullo. La massa invariante del sistema è anche denominata *energia nel centro di massa*.

Ritornando all'esempio precedente di una particella che incide su un bersaglio, nel quale quindi la particella interagente del bersaglio è ferma rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, la massa invariante delle due particelle è data da:

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2 c^2} = \sqrt{(E_1 + m_2 c^2)^2 - |\vec{p}_1|^2 c^2} = \\ &= \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2}\end{aligned}\quad (16)$$

dove abbiamo usato energie ed impulsi riferiti al laboratorio. Nell'ipotesi in cui le masse m_1 ed m_2 siano molto minori di E_1/c^2 , si ha che:

$$\sqrt{s} \simeq \sqrt{2E_1 m_2 c^2} \quad (17)$$

Supponiamo ora invece che entrambe le particelle siano in movimento; in questo caso la massa invariante è:

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2 c^2} = \\ &= \sqrt{E_1^2 - |\vec{p}_1|^2 c^2 + E_2^2 - |\vec{p}_2|^2 c^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2)} = \\ &= \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2(E_1 E_2 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| c^2 \cos\theta_{12})}\end{aligned}\quad (18)$$

Facendo di nuovo l'ipotesi che due particelle siano relativistiche, cioè che le masse siano molto minori delle loro energie, la (18) diventa:

$$\sqrt{s} \simeq \sqrt{2E_1 E_2 (1 - \cos\theta_{12})} \quad (19)$$

Se infine le due particelle si scontrano frontalmente, come avviene in un collider, e le loro energie sono uguali, la massa invariante è $\sqrt{s} = 2E$.

La differenza tra un esperimento a bersaglio fisso ed uno a fasci incidenti è evidente; nel caso di un fascio di protoni da 100 GeV su un bersaglio di idrogeno ($m_p \sim m_H \sim 938 \text{ MeV}/c^2$) si ha che $\sqrt{s} \simeq 14 \text{ GeV}$; se il fascio di protoni ha energia 400 GeV, la massa invariante protone-protone è solo 28 GeV, infatti secondo la (17) per raddoppiare l'energia nel centro di massa, e quindi la massa invariante del sistema, occorre un incremento di quattro volte dell'energia della particella incidente. La gran parte dell'energia del protone non è disponibile nell'interazione ma serve a dare impulso al centro di massa delle due particelle. Nel caso invece di urto protone-protone al collider, se i due protoni hanno energie uguali, il centro di massa del sistema resta fermo e

tutta l'energia è disponibile per l'interazione; per avere una massa invariante doppia, è sufficiente raddoppiare l'energia delle particelle incidenti.

Ricaviamo infine l'espressione della velocità del sistema di riferimento del centro di massa rispetto al sistema del laboratorio; consideriamo di nuovo il caso di una particella incidente contro un bersaglio: nel laboratorio il quadrimpulso totale è $\mathbf{P}_{tot} = [E_1/c + m_2c, \vec{p}_1]$ mentre nel centro di massa $\mathbf{P}_{tot}^* = [(E_1^* + E_2^*)/c, \vec{0}] = [\sqrt{s}/c, \vec{0}]$. Fissando l'asse x in corrispondenza della direzione di moto del centro di massa e sostituendo i due quadrimpulsi nella relazione (4):

$$\begin{pmatrix} \sqrt{s}/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{c.m.} & -\beta_{c.m.}\gamma_{c.m.} & 0 & 0 \\ -\beta_{c.m.}\gamma_{c.m.} & \gamma_{c.m.} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1/c + m_2c \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$\beta_{c.m.} = \frac{p_1}{E_1/c + m_2c} = \frac{p_1c}{E_{tot}^{lab}} \quad (21)$$

Generalizzando:

$$\beta_{c.m.} = \frac{|\vec{p}_{tot}^{lab}|c}{E_{tot}^{lab}} \quad (22)$$

e quindi, sostituendo la (22) nella definizione di γ ed utilizzando la (15):

$$\gamma_{c.m.} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{c.m.}^2}} = \frac{E_{tot}^{lab}}{\sqrt{s}} \quad (23)$$

6.4 Momento trasverso e trasformazione degli angoli

Si consideri il quadrimpulso di una particella nel passaggio dal sistema del centro di massa al sistema del laboratorio, ipotizzando per semplicità che il centro di massa si muova parallelamente all'asse z come in figura 2 e che quindi la trasformazione di Lorentz sia lungo quest'asse; si ha quindi:

$$\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ |\vec{p}| \sin\theta \cos\phi \\ |\vec{p}| \sin\theta \sin\phi \\ |\vec{p}| \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E^* \\ |\vec{p}^*| \sin\theta^* \cos\phi^* \\ |\vec{p}^*| \sin\theta^* \sin\phi^* \\ |\vec{p}^*| \cos\theta^* \end{pmatrix} \quad (24)$$

dove β e γ sono relative al centro di massa ($\beta_{c.m.}$ e $\gamma_{c.m.}$ introdotte nel paragrafo precedente).

Il *momento trasverso*, cioè la componente del momento perpendicolare all'asse z , è un invariante relativistico. Infatti elevando al quadrato ambo i membri delle componenti x ed y del sistema (24) e sommando si ha:

$$|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = |\vec{p}^*|^2 \sin^2 \theta^* (\cos^2 \phi^* + \sin^2 \phi^*) \quad (25)$$

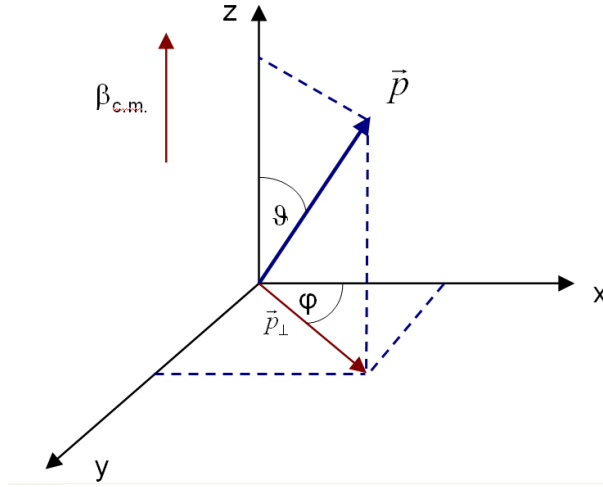


Figura 2: Rappresentazione dell'angolo polare θ e dell'angolo azimutale ϕ relativi all'impulso nel sistema del laboratorio.

e quindi:

$$p_{\perp} = |\vec{p}| \sin \theta = |\vec{p}^*| \sin \theta^* = p_{\perp}^* \quad (26)$$

Dividendo invece la componente y del sistema (24) per la componente x si ha $\text{tg} \phi = \text{tg} \phi^*$: l'angolo azimutale attorno ad un asse è un invariante relativistico per trasformazioni di Lorentz lungo l'asse stesso.

Determiniamo infine la relazione tra l'angolo θ nei due sistemi di riferimento dividendo la componente y di (24) per la componente z ; data l'uguaglianza $\phi = \phi^*$ si ottiene:

$$\text{tg} \theta = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_{c.m.} (\beta_{c.m.} E^* / |\vec{p}^*| + \cos \theta^*)} \quad (27)$$

La velocità della particella nel centro di massa, $\beta^* = |\vec{p}^*|/E^*$, è indipendente da $\beta_{c.m.}$. Vale la pena analizzare separatamente i seguenti casi:

- $\beta_{c.m.} > \beta^*$
il denominatore della (27) è sempre positivo qualsiasi sia l'angolo θ^* ($0 \leq \theta^* \leq \pi$); quindi $0 \leq \theta < \pi/2$ cioè la particella, nel sistema del laboratorio, si muove sempre *in avanti*.

Essendo $\theta = 0$, sia per $\theta^* = 0$ sia per $\theta^* = \pi$, deve esistere, nel sistema del laboratorio, un angolo $\theta_{max} < \pi/2$, angolo che può essere determinato annullando la derivata della (27):

$$\frac{d(tg\theta)}{d\theta^*} = \frac{1 + \cos\theta^* (\beta_{c.m.}/\beta^*)}{\gamma_{c.m.} (\beta_{c.m.}/\beta^* + \cos\theta^*)^2} = 0 \quad (28)$$

In corrispondenza di $\cos\theta^* = -\beta^*/\beta_{c.m.}$, si ha quindi l'angolo massimo nel laboratorio:

$$tg\theta_{max} = \frac{\beta^*}{\gamma_{c.m.} \sqrt{\beta_{c.m.}^2 - (\beta^*)^2}} \quad (29)$$

L'energia della particella è quindi:

$$\begin{aligned} E(\theta_{max}) &= \gamma_{c.m.} (E^* + \beta_{c.m.} |\vec{p}^*| \cos\theta^*) = \gamma_{c.m.} (E^* - |\vec{p}^*| \beta^*) = \\ &= \gamma_{c.m.} \left(E^* - \frac{|\vec{p}^*|^2}{E^*} \right) = m^2 \left(\frac{\gamma_{c.m.}}{E^*} \right) = m \frac{\gamma_{c.m.}}{\gamma^*} \end{aligned} \quad (30)$$

- $\beta_{c.m.} < \beta^*$
contrariamente al caso precedente, in questo caso la velocità della particella nel centro di massa può annullare il boost del centro di massa stesso, ammettendo nel laboratorio angoli $\theta > \pi/2$; dalla (27) si trova che $\theta = \pi/2$ quando $\cos\theta^* = -\beta_{c.m.}/\beta^*$. Inoltre non esiste un angolo θ_{max} essendo la derivata (28) sempre positiva.
- $\beta_{c.m.} = \beta^*$
in questo caso limite, $\cos\theta^* = -1$ corrisponde nel laboratorio all'angolo θ_{max} che è proprio $\pi/2$. È interessante notare come in questa configurazione la particella, che nel centro di massa viaggia in direzione opposta al moto del centro di massa stesso ($\theta^* = -\pi$), sia invece in quiete nel sistema del laboratorio; infatti il suo β^* annulla esattamente il boost del centro di massa.

7 Energia di Soglia di una Reazione

Nel caso di un urto, come quello rappresentato in figura 3, tra una particella incidente ed un bersaglio fisso, con produzione di n particelle nello stato finale, si definisce *energia di soglia* della reazione, l'energia cinetica K_i della particella incidente in corrispondenza della quale le particelle dello stato finale siano prodotte in quiete nel sistema del centro di massa. L'energia nel centro di massa, calcolata per lo stato finale, è:

$$\sqrt{s} = \sum_{f=1}^n (K_f^* + m_f c^2) \quad (31)$$

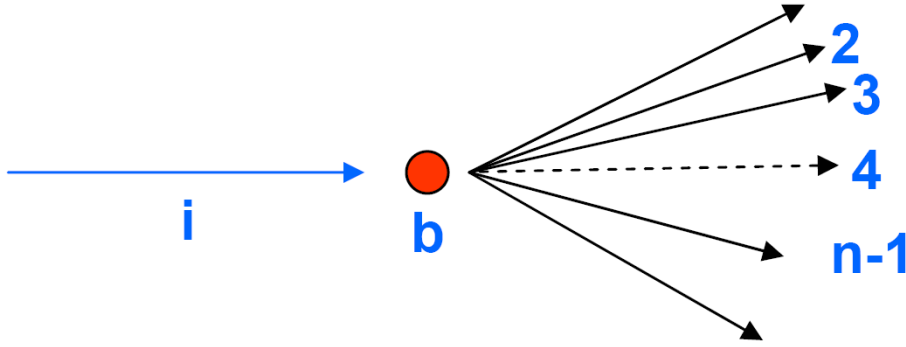


Figura 3: Urto di una particella incidente su un bersaglio con produzione di n particelle nello stato finale.

L'espressione analoga per lo stato iniziale è:

$$\begin{aligned} s &= (E_i + m_b c^2)^2 - |\vec{p}_i|^2 c^2 = 2m_b c^2 E_i + m_i^2 c^4 + m_b^2 c^4 = \\ &= 2m_b c^2 K_i + (m_i + m_b)^2 c^4 \end{aligned} \quad (32)$$

Uguagliando le due espressioni dell'energia nel centro di massa si ha:

$$K_i = \frac{\left[\sum_{f=1}^n (K_f^* + m_f c^2) \right]^2 - (m_i + m_b)^2 c^4}{2m_b c^2} \geq \frac{\left(\sum_{f=1}^n m_f \right)^2 - (m_i + m_b)^2}{2m_b} c^2 \quad (33)$$

Nel caso in cui l'espressione a destra nella disuguaglianza sia positiva, quando cioè la somma delle masse delle particelle nello stato finale sia maggiore

della somma tra massa della particella incidente e la massa del bersaglio, si definisce l'energia (cinetica) di soglia come:

$$(K_i)_{soglia} = \frac{\left(\sum_{f=1}^n m_f\right)^2 - (m_i + m_b)^2}{2m_b} c^2 \quad (34)$$

altrimenti il processo è sempre cinematicamente permesso perchè non esiste una energia di soglia.

Consideriamo un fascio di protoni su un bersaglio di idrogeno e calcoliamo l'energia di soglia per la produzione di un antiprotone; la reazione con il minor numero di protoni nello stato finale è, per la conservazione del numero barionico, $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$.

Applicando la (34) si ha:

$$(K_i)_{soglia} = \frac{(4m_p)^2 - (2m_p)^2}{2m_p} c^2 = 6m_p c^2 \simeq 5.6 \text{ GeV}$$

Abbiamo qui considerato il protone dell'idrogeno come un bersaglio fermo rispetto al laboratorio; l'energia di soglia di produzione dell'antiprotone è, in realtà più bassa, quando si considera l'impulso di Fermi⁴ dei protoni all'interno di un nucleo.

⁴l'impulso di Fermi è l'impulso caratteristico dei protoni in un nucleo (visto come un gas di Fermi) e vale circa 250 MeV/c

8 Scattering Elastico

In un evento di scattering elastico (diffusione elastica) tra un elettrone ed un nucleo, nel quale il nucleo è inizialmente a riposo, come rappresentato in figura 4, la conservazione del quadrimpulso totale implica che:

$$\mathbf{p} + \mathbf{P} = \mathbf{p}' + \mathbf{P}' \quad (35)$$

e cioè che la somma tra i quadrimpulsi iniziali, che nel sistema del laboratorio sono $\mathbf{p} = [E, \vec{p}]$ e $\mathbf{P} = [M, \vec{0}]$, e quelli finali, $\mathbf{p}' = [E', \vec{p}']$ e $\mathbf{P}' = [E'_P, \vec{P}']$, siano uguali⁵.

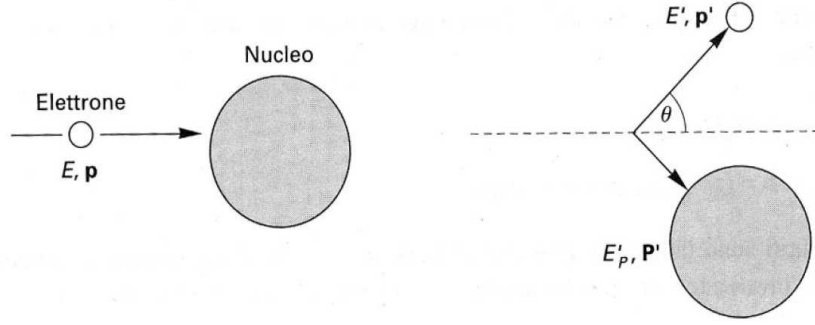


Figura 4: Scattering elastico di un elettrone su un nucleo

Considerando che, nel caso di urto elastico, le particelle dello stato iniziale e quelle dello stato finale sono le stesse e quindi $\mathbf{p}^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = m_e^2 = \mathbf{p}'^2$ e $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}'^2 = M^2$, se si elevano al quadrato entrambi i membri della (35), si ottiene:

$$m_e^2 + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{P} + M^2 = m_e^2 + 2\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}' + M^2 \implies \mathbf{p} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}' \quad (36)$$

Sperimentalmente viene misurato solo l'elettrone nello stato finale mentre il nucleo che rincula non è rivelato, per cui conviene scrivere la (36) come:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{P} - \mathbf{p}') = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{P} - m_e^2 \quad (37)$$

che nel sistema del laboratorio diventa:

$$EM = EE' - \vec{p} \cdot \vec{p}' + E'M - m_e^2 \quad (38)$$

⁵abbiamo indicato con E'_P l'energia di rinculo del nucleo dopo l'urto e posto, qui e nel seguito, $c=1$ per non appesantire troppo il testo.

Se le energie in gioco sono abbastanza elevate da poter trascurare m_e^2 , si ricava infine l'espressione che, nel sistema di riferimento solidale col laboratorio, lega l'energia dell'elettrone diffuso all'energia iniziale, alla massa del nucleo e all'angolo di diffusione, che in figura 4 abbiamo indicato con θ :

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos\theta)} \quad (39)$$

Per un fissato bersaglio quindi l'energia dell'elettrone diffuso dipende unicamente dall'angolo di diffusione; negli urti anelastici invece questa dipendenza univoca non esiste. Dalla (39) si deduce anche che l'energia di rinculo del nucleo, pari a $(E - E')$, dipende dal rapporto E/M ed in particolare cresce al crescere dell'energia iniziale dell'elettrone rispetto alla massa del nucleo, in analogia alla meccanica classica. Questo fatto è visualizzato dai due casi estremi rappresentati in figura 5: se un elettrone di 500 MeV viene diffuso su un nucleo di massa atomica $A = 50$, nella configurazione di massimo rinculo ($\theta=180^\circ$) solo il 2% dell'energia dell'elettrone viene trasferita al nucleo, mentre un elettrone di 10 GeV su un nucleo di idrogeno trasmette fino al 95.5% della sua energia al protone.

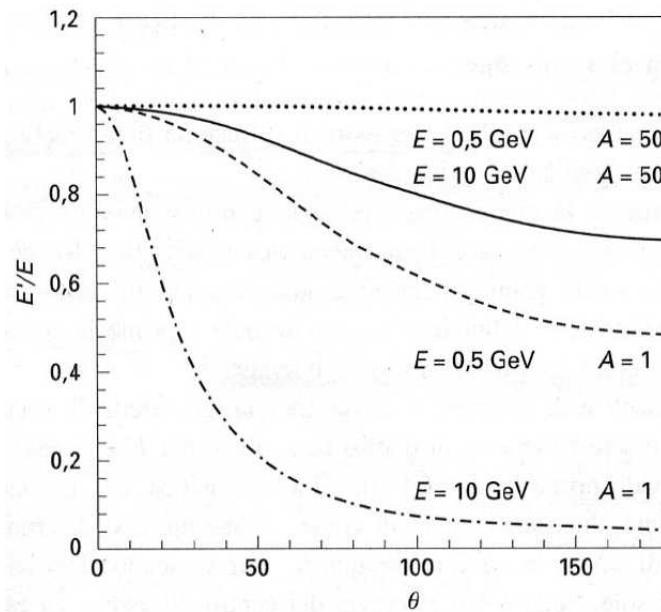
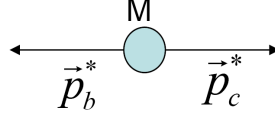


Figura 5: Frazione di energia iniziale conservata dall'elettrone diffuso in funzione dell'angolo di diffusione, per energie di 0.5 e 10 GeV e per nuclei di $A=1$ e $A=50$.

9 Decadimento in due corpi

Si consideri il decadimento $a \rightarrow b + c$ nel quale una particella di massa M decade in due particelle di massa rispettivamente m_b ed m_c . Nel sistema di



riferimento del centro di massa la particella a , prima di decadere, è naturalmente in quiete e quindi possiamo scrivere la conservazione del quadrimpulso come:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{s} = E_b^* + E_c^* \\ \vec{0} &= \vec{p}_b^* + \vec{p}_c^* \end{aligned} \quad (40)$$

da cui $|\vec{p}_b^*| = |\vec{p}_c^*|$ (valore che nel seguito viene indicato con p^*). La prima delle (40) può essere riscritta nel modo seguente:

$$M = \sqrt{(p^*)^2 + m_b^2} + \sqrt{(p^*)^2 + m_c^2} \quad (41)$$

portando la prima radice a sinistra ed elevando al quadrato:

$$M^2 + (p^*)^2 + m_b^2 - 2M\sqrt{(p^*)^2 + m_b^2} = (p^*)^2 + m_c^2 \quad (42)$$

cioè:

$$M^2 + m_b^2 - m_c^2 = 2M\sqrt{(p^*)^2 + m_b^2} \quad (43)$$

che al quadrato diventa:

$$M^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 + 2M^2(m_b^2 - m_c^2) = 4M^2 [(p^*)^2 + m_b^2] \quad (44)$$

Il modulo dell'impulso delle particelle finali nel centro di massa è quindi univocamente determinato a partire dalla massa della particella che decade e dalle due masse delle particelle figlie:

$$p^* = \sqrt{\frac{M^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 - 2M^2(m_b^2 + m_c^2)}{4M^2}} \quad (45)$$

Utilizzando la (45) si ricava l'espressione delle energie delle particelle prodotto del decadimento:

$$\begin{aligned} E_b^* &= \sqrt{(p^*)^2 + m_b^2} = \frac{M^2 + (m_b^2 - m_c^2)}{2M} = \frac{s + (m_b^2 - m_c^2)}{2\sqrt{s}} \\ E_c^* &= \sqrt{(p^*)^2 + m_c^2} = \frac{M^2 - (m_b^2 - m_c^2)}{2M} = \frac{s - (m_b^2 - m_c^2)}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (46)$$

Il decadimento è *monoenergetico* in quanto l'energia delle particelle b e c, nel centro di massa, può assumere un solo valore. Un decadimento a tre corpi invece non è monoenergetico; l'esistenza del neutrino è stata ipotizzata proprio osservando la distribuzione continua dell'energia dell'elettrone nel decadimento del neutrone ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$).

Dalla (41) segue $M \geq m_b + m_c$ cioè che, affinché il decadimento sia cinematicamente permesso, la somma delle particelle figlie non deve mai superare la massa della particella che decade; questa regola vale anche nel caso di decadimenti in più di due particelle ed è una diretta conseguenza della conservazione dell'energia. Notiamo anche che, dal punto di vista della cinematica, il decadimento, nel sistema del centro di massa, è isotropo, vale a dire non esiste una direzione preferenziale per le particelle figlie⁶; la direzione però di una particella di decadimento rispetto all'altra è fissata dalla conservazione dell'impulso: le due particelle sono emesse *back-to-back* nel sistema del centro di massa.

Nel caso particolare in cui le masse di b e c siano uguali ($m_b = m_c = m$), anche le relative energie, sempre nel sistema del centro di massa, saranno uguali: $E_b^* = E_c^* = M/2$; inoltre $p^* = \sqrt{(M/2)^2 - m^2}$.

Se la particella decade in volo, come nel caso di pioni e kaoni nella produzione di fasci di muoni e di neutrini, il centro di massa non coincide con il sistema del laboratorio. Nel laboratorio le due particelle non sono emesse in direzioni opposte ma, utilizzando la (27), ad angoli:

$$\operatorname{tg}\theta_{b/c} = \frac{\sin\theta^*}{\gamma_a (\beta_a E_{b/c}^* / p^* \pm \cos\theta^*)} \quad (47)$$

dove $\beta_a = |\vec{p}_a|/E_a$ e $\gamma_a = E_a/M$; il segno + vale per la particella b emessa nel centro di massa ad un angolo θ^* rispetto alla direzione di moto di a (in una configurazione analoga a quella di figura 6) mentre si ha il segno - per la particella c, emessa ad un angolo $(\pi - \theta^*)$. Sostituendo p^* e $E_{b/c}^*$ con le (45) e (46), si determinano gli angoli di decadimento nel laboratorio.

⁶l'isotropia è limitata alla cinematica; una direzione privilegiata può esistere ad esempio nel caso in cui la particella che decade abbia uno spin non nullo.

Valgono tutte le considerazioni fatte nel paragrafo 6.4, considerazioni che qui vengono riassunte brevemente:

- se $\beta_a > \beta_i^*$, la particella figlia i è emessa, nel sistema del laboratorio, sempre in avanti (rispetto alla direzione della particella che decade) ed esiste un angolo massimo di emissione $\theta_{max} < \pi/2$ corrispondente nel centro di massa a $\theta_i^* = \arccos(-\beta_i^*/\beta_a)$
- se $\beta_a < \beta_i^*$, la particella figlia i è emessa in avanti, nel sistema del laboratorio, solo quando $\cos\theta_i^* > -\beta_a/\beta_i^*$; per $\cos\theta_i^* = -\beta_a/\beta_i^*$ viene emessa a $\theta_i = \pi/2$ mentre per $\cos\theta_i^* < -\beta_a/\beta_i^*$ viene emessa all'indietro (fino a $\theta_i = \pi$ quando $\theta_i^* = \pi$).

9.1 Decadimento del π_0 in due fotoni

Il π_0 è un mesone neutro, privo di spin, di massa $m_{\pi_0} = 135$ MeV e vita media $\tau_{\pi_0} = 8.4 \cdot 10^{-17}$ s ($c\tau_{\pi_0} = 25$ nm); in quasi il 99% dei casi questa particella decade in due fotoni costituendo un ottimo esempio di decadimento in due particelle uguali, esempio che verrà quindi analizzato in dettaglio in questo paragrafo.

Nel decadimento $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ i due fotoni sono emessi, nel sistema di riferimento del centro di massa, lungo direzioni opposte ($\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$) e con energie uguali $E_1^* = E_2^* = m_{\pi_0}/2$.

Se \vec{p}_0 è l'impulso del π_0 nel sistema del laboratorio e $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ è l'angolo tra le direzioni dei due fotoni (figura 6) e $E_i = |\vec{p}_i|$ ($i=1,2$), dall'espressione della massa invariante (19) si ha:

$$\sqrt{s} = m_{\pi_0} = \sqrt{2E_1E_2(1 - \cos\alpha)} \quad (48)$$

da cui segue la relazione tra le energie dei due fotoni e l'angolo tra essi compreso:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{m_{\pi_0}}{2\sqrt{E_1E_2}} \quad (49)$$

Massimizzando il prodotto delle energie dei due fotoni E_1E_2 si ottiene perciò l'angolo minimo di apertura tra di essi:

$$\frac{d(E_1E_2)}{dE_1} = \frac{d(E_1(E_0 - E_1))}{dE_1} = E_0 - 2E_1 = 0$$

Nella configurazione di equipartizione dell'energia del π_0 tra i due fotoni ($E_1 = E_2 = E_0/2$) si ha quindi l'apertura angolare minima.

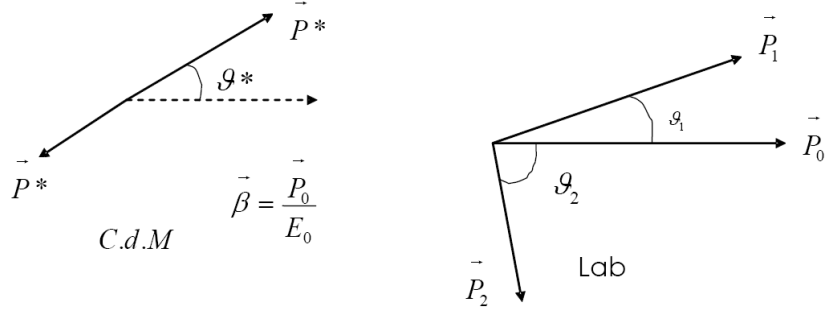


Figura 6: Cinematica del decadimento $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ nel sistema di riferimento del centro di massa e nel laboratorio.

Ricaviamo ora la distribuzione di energia dei due fotoni nel sistema di riferimento del laboratorio (nel centro di massa i due fotoni sono monoenergetici avendo sempre un'energia pari alla metà della massa del π_0). Fissiamo i due sistemi di riferimento in modo tale che l'asse x sia parallelo alla direzione di moto del π_0 (quindi parallelo a \vec{p}_0 in figura 6) e l'asse y sul piano della figura; utilizzando le trasformazioni di Lorentz (7) per esprimere il quadrimpulso del primo fotone nel sistema del laboratorio rispetto al sistema del centro di massa:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \gamma(E_1^* + \beta p_{1x}^*) = \gamma(E^* + \beta p^* \cos\theta^*) \\
 p_{1x} &= \gamma(p_{1x}^* + \beta E^*) = \gamma(p^* \cos\theta^* + \beta E^*) \\
 p_{1y} &= p_{1y}^* = p^* \sin\theta^*
 \end{aligned} \tag{50}$$

dove $\beta = |\vec{p}_0|/E_0$, $\gamma = E_0/m_{\pi_0}$ e si è omessa la componente z perchè nulla in entrambi i riferimenti. Per il secondo fotone basta sostituire θ^* con $(\pi + \theta^*)$. Sostituendo le espressioni di β e γ nella prima delle (50):

$$E_1 = \gamma(E^* + \beta p^* \cos\theta^*) = \frac{E_0}{m_{\pi_0}} \frac{m_{\pi_0}}{2} \left(1 + \frac{|\vec{p}_0|}{E_0} \cos\theta^* \right) = \frac{E_0 + |\vec{p}_0| \cos\theta^*}{2} \tag{51}$$

Sostituendo θ^* con $(\pi + \theta^*)$ si ha invece:

$$E_2 = \frac{E_0 - |\vec{p}_0| \cos\theta^*}{2} \tag{52}$$

In generale l'energia dei fotoni varierà da un massimo di $(E_0 + |\vec{p}_0|)/2 = E_0(1 + \beta)/2$ per $\theta^* = 0$ cioè con il fotone emesso nella direzione di moto del π_0 , ad un minimo di $(E_0 - |\vec{p}_0|)/2 = E_0(1 - \beta)/2$ per $\theta^* = \pi$ (e $\theta = \pi$).

Vediamo ora come è distribuita l'energia del fotone tra il valore massimo ed il valore minimo, ricaviamo cioè la funzione di distribuzione. Prima di tutto osserviamo che, avendo il π_0 spin nullo, i fotoni nel sistema di riferimento del centro di massa sono emessi isotropicamente. La distribuzione di probabilità angolare non dipende dall'angolo solido di emissione ($df/d\Omega^* = 1/4\pi$) ed è quindi uniforme in $\cos(\theta^*)$; inoltre imponendo la corretta normalizzazione, $df/d(\cos \theta^*) = 1/2$. Facendo uso della (51) possiamo scrivere:

$$\frac{df}{dE_1} = \frac{df}{d(\cos\theta^*)} \cdot \frac{d(\cos\theta^*)}{dE_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|\vec{p}_0|} = \frac{1}{|\vec{p}_0|} \quad (53)$$

La distribuzione di energia nel sistema del laboratorio è costante (figura 7).

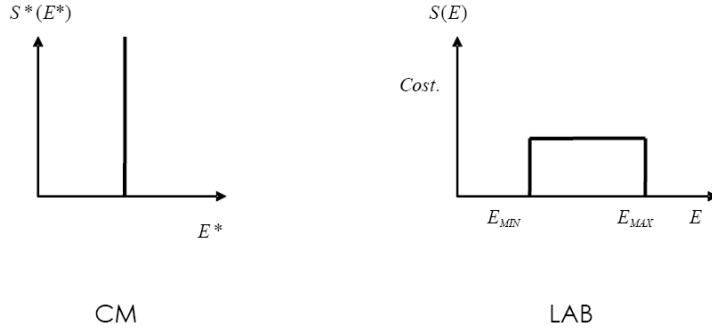


Figura 7: Distribuzione di energia dei fotoni nel decadimento $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ nel sistema di riferimento del centro di massa e nel laboratorio.

Mostriamo infine come la configurazione di decadimento ad angolo minimo vista precedentemente, configurazione nella quale l'energia dei due fotoni è uguale, sia anche la configurazione più probabile, cioè quella corrispondente al massimo della funzione di distribuzione angolare $df/d\alpha$, dove α è l'angolo compreso tra i due fotoni nel sistema del laboratorio. La relazione (49) può essere riscritta nel modo seguente:

$$4E_1(E_0 - E_1) = \frac{m_{\pi_0}^2}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (54)$$

e differenziando ambo i membri otteniamo:

$$4(E_0 - 2E_1)dE_1 = -\frac{m_{\pi_0}^2}{\sin^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \quad (55)$$

Risolvendo invece l'equazione (54) in E_1 :

$$E_1 = \frac{E_0 \pm \sqrt{E_0^2 - m_{\pi_0}^2 / \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{2} \quad (56)$$

dove va considerato il segno $+$ nel caso in cui γ_1 sia il fotone più energetico ($E_1 > E_0/2$) ed il segno $-$ se invece γ_1 è il fotone meno energetico. Supponiamo nel seguito che γ_1 sia il fotone più energetico:

$$2E_1 - E_0 = \sqrt{E_0^2 - \frac{m_{\pi_0}^2}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad (57)$$

Infine sostituendo quest'ultima nella relazione (55) ed utilizzando la (53) ricavata precedentemente:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{dE_1} \cdot \frac{dE_1}{d\alpha} = \frac{m_{\pi_0}^2}{4|\vec{p}_0|E_0} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - m_{\pi_0}^2/E_0^2}} \quad (58)$$

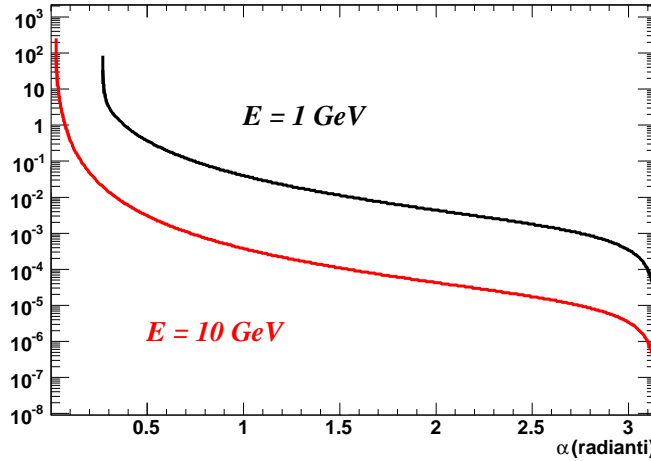


Figura 8: Distribuzione di probabilità dell'angolo compreso tra i due fotoni nel decadimento $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$, nel sistema di riferimento del laboratorio, per due diverse energie del π_0 . Si può notare come l'angolo minimo, che cresce al diminuire dell'energia del π_0 , corrisponda al massimo della distribuzione di probabilità.

Ne segue quindi che la configurazione di decadimento più probabile sia quella con il minimo angolo di apertura tra i due fotoni che corrisponde, come visto in precedenza, anche all'equipartizione dell'energia iniziale tra i due fotoni; in questo caso infatti $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{m_{\pi_0}}{E_0}$.

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Richiami sulla Relatività Ristretta | 1 |
| 2 | Notazioni | 2 |
| 3 | Trasformazioni di Lorentz | 2 |
| 4 | Cono di luce e simultaneità di due eventi | 5 |
| 5 | Il quadrivettore energia-impulso | 7 |
| 6 | Sistemi di riferimento e massa invariante | 8 |
| 6.1 | Sistema del laboratorio | 8 |
| 6.2 | Sistema del centro di massa | 8 |
| 6.3 | Massa invariante | 8 |
| 6.4 | Momento trasverso e trasformazione degli angoli | 10 |
| 7 | Energia di Soglia di una Reazione | 13 |
| 8 | Scattering Elastico | 15 |
| 9 | Decadimento in due corpi | 17 |
| 9.1 | Decadimento del π_0 in due fotoni | 19 |