ESERCIZI DI FISICA

Giovanni Organtini
"Sapienza", Università di Roma & INFN–Sez. di Roma

Indice

Capitolo 1

Campi elettrici e forze elettriche

Esercizio 1.0.1

Due minuscole sferette elettricamente cariche sono appese ciascuna a un filo di massa trascurabile al soffitto. La massa di ciascuna pallina è $m = 0.14$ g e il modulo della carica elettrica su ciascuna di esse è lo stesso. Le palline, se lasciate libere di muoversi, si avvicinano l'una all'altra fino a giungere a distanza $d = 2.05$ cm l'una dall'altra. I fili cui sono appese formano ciascuno un angolo di $20°$ con la verticale. Calcolare il modulo della forza elettrica agente su ciascuna sferetta, la tensione sui fili e il modulo della carica presente su ciascuna.

<u>*Soluzione*</u>

Sul sistema agiscono, oltre alla tensione del filo $\mathbf{T}$, sia la forza elettrica $\mathbf{F}_{el}$ che ciascuna pallina esercita sull'altra, sia la forza di gravità $\mathbf{F}_g$. Se cosí non fosse le sfere si disporrebbero in modo tale da toccarsi oppure da mantenere i fili in posizione orizzontale. La forza elettrica che si esercita su una sferetta ha modulo $F_{el} = qE$, dove $E = kq/d^2$ è il modulo dell'intensità del campo prodotto dall'altra sfera. La forza è attrattiva.

L'equazione del moto all'equilibrio è

$$\mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_g + \mathbf{T} = 0\,. \tag{1.1}$$

Figura 1.1: Bilancio delle forze agenti su una delle sferette dell'esercizio 1.0.1.

Rappresentiamo le forze in un sistema di riferimento con l'asse x orizzontale e centrato su una delle sferette, ad esempio quella di sinistra, come in Figura 1.1. In questo caso le componenti delle forze sono, rispettivamente

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{el} = (F_{el}, 0) = (qE, 0) \\ \mathbf{F}_g = (0, -F_g) = (0, -mg) \\ \mathbf{T} = (T_x, T_y) = T(-\sin\alpha, \cos\alpha) \end{cases} \tag{1.2}$$

dove q è il modulo della carica di ciascuna sfera, E è il campo elettrico prodotto dalla sfera a destra nel punto in cui si trova la sfera di sinistra, il cui modulo vale $E = kq/d^2$, g è l'accelerazione di gravità e $\alpha = 20°$ è l'angolo formato dai fili con la verticale.

Scrivendo il bilancio per componenti si ottiene

$$\begin{cases} qE = T\sin\alpha \\ mg = T\cos\alpha \end{cases} \tag{1.3}$$

Dividendo membro a membro facciamo scomparire T e otteniamo

$$\tan\alpha = \frac{qE}{mg} = \frac{kq^2}{d^2 mg}\,. \tag{1.4}$$

La forza $F_{el} = qE$ vale $mg\tan\alpha = 0.5$ mN. La tensione del filo si ricava dalla seconda equazione: $T = mg/\cos\alpha = 1.46$ mN. Il valore assoluto della carica di ciascuna sfera, invece, si determina usando la relazione (1.4): $q^2 = 4\pi\epsilon_0 d^2 mg\tan\alpha$, da cui $q = 4.8\,10^{-9}$ C. □

Esercizio 1.0.2

Un elettrone entra in una regione in cui è presente un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$ con velocità $\mathbf{v}_0 = 5.45\,10^6$ m/s, perpendicolare alle linee di forza del campo. Dopo aver percorso 2.25 cm in direzione della sua velocità iniziale, l'elettrone risulta essere stato deflesso di 0.618 cm nella direzione perpendicolare. Qual è l'intensità del campo elettrico? Quanto vale la velocità dell'elettrone nello stato finale?

<u>Soluzione</u>
Quando l'elettrone entra nella regione prevista subisce la forza dovuta alla presenza del campo elettrico $F = qE$ diretta parallelamente al campo. Scegliamo un sistema di assi cartesiani il cui asse x è diretto come la velocità iniziale, che quindi ha componenti $(v_0, 0)$. In questo sistema il campo elettrico è parallelo all'asse y. Non importa come sia orientato, se trascuriamo la forza gravitazionale agente sulla carica. Scegliamo, tanto per fissare le idee, il campo elettrico orientato verso l'alto $\mathbf{E} = (0, E)$.

L'elettrone dunque è soggetto a una forza diretta verso il basso e la sua equazione del moto è

$$\begin{cases} m_e \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m_e \dfrac{d^2y}{dt^2} = -qE \end{cases} \tag{1.5}$$

Lungo l'asse x abbiamo $x(t) = v_0 t$, da cui si ricava il tempo necessario a percorrere $d = 2.25\,\mathrm{cm} = 2.25\,10^{-2}\,\mathrm{m}$, $t_0 = d/v_0 = 4.13\,10^{-9}$ s. Lungo l'altro asse il moto è uniformemente accelerato:

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}\frac{qE}{m_e}t^2\,, \tag{1.6}$$

ricordando che la componente y della velocità iniziale è zero. Invertendo questa relazione si trova

$$E = -\left(y(t) - y_0\right)\frac{2m_e}{qt^2}\,, \tag{1.7}$$

e sapendo che $y(t) - y_0 = 0.618\,10^{-2}$ m abbiamo $E = 4.12$ kN/C[1]. La componente x della velocità dell'elettrone resta invariata, mentre la componente y assume il valore $dy/dt = \frac{qE}{m}t$. La forza cui l'elettrone è soggetto vale $qE = 6.59\,10^{-18}$ N, e dunque $dy/dt = -2.99\,10^6$ m/s. Complessivamente si ha dunque $v = 6.22\,10^6$ m/s.

Con tali velocità gli effetti relativistici si possono trascurare. Inoltre possiamo verificare che la nostra ipotesi iniziale, e cioè che la forza gravitazionale sia trascurabile, sia corretta. In effetti quest'ultima forza ha intensità $F_g = m_e g = 8.92\,10^{-30}$ N, molto minore di quella elettrica. $\square$

[1]Abbiamo usato un paio di risultati che si assumono noti, come la massa dell'elettrone $m_e = 9.1\,10^{-31}$ kg e la sua carica $q = -1.6\,10^{-19}$ C.

Figura 1.2: I campi elettrici prodotti da due cariche uguali disposte simmetriche rispetto all'origine degli assi.

Esercizio 1.0.3

N cariche elettriche q, tutte uguali tra di loro, sono disposte in modo da distribuirsi uniformemente su una circonferenza di raggio R. A un certo istante una delle cariche viene spostata nel centro di tale circonferenza. Calcolare il campo elettrico in questa situazione e la forza agente sulla carica.

Soluzione
Per risolvere in maniera semplice questo esercizio si può usare il principio di sovrapposizione. Infatti, nella condizione iniziale, le cariche sono disposte simmetricamente rispetto al centro della circonferenza. Questo implica che il campo elettrico in tale punto deve essere nullo. Per convincersene basta considerare un paio di casi, ad esempio $N = 3, 4$, e osservare che in effetti i campi elettrici prodotti da ciascuna carica annullano quelli prodotti dalle altre. Nel caso di N pari, ad esempio, possiamo sempre trovare un sistema di riferimento nel quale due delle cariche si trovano sull'asse delle ascisse. Il campo elettrico prodotto dalla carica a destra è $\mathbf{E} = -kq/R^2\hat{\mathbf{x}}$, mentre quello prodotto dalla carica a sinistra è $\mathbf{E} = kq/R^2\hat{\mathbf{x}}$. Complessivamente, dunque, in $x = 0$ il campo è nullo. Per ogni carica la cui posizione sia (x, y), se ne trova sempre una simmetrica con coordinate $(-x, -y)$. Anche in questo caso il campo elettrico complessivo si annulla, come si vede anche graficamente dalla Figura 1.2.

Nel caso di N dispari si può fare un ragionamento analogo, ...

Spostare una delle cariche al centro del sistema di riferimento equivale ad aggiungere nel punto (x, y) in cui si trovava inizialmente la carica q una carica $-q$, in modo da lasciare una carica complessiva nulla in quel punto, e ad aggiungere una carica q nel centro della distribuzione. Il campo elettrico nel centro di questa distribuzione dunque è quello dovuto alle N cariche nella distribuzione originale $\mathbf{E} = 0$, cui si somma quello prodotto dalla carica $-q$, che si trova a distanza R dal centro. Pertanto il campo vale

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^3}\mathbf{R}\,. \tag{1.8}$$

Sulla carica q che si trova nel centro della distribuzione dunque agisce la forza

Figura 1.3: Il campo prodotto da due cariche uguali e contrarie al vertice di un triangolo equilatero, disposte negli altri due vertici del triangolo.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R^3}\mathbf{R}\,. \tag{1.9}$$

□

Esercizio 1.0.4

Tre cariche $q_1 = q_3 = 7.3\ \mu$C e $q_2 = -7.3\ \mu$C sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato $a = 93$ cm. Trovare il campo elettrico nel punto in cui si trova la carica q_3. Quest'ultima viene poi spostata nel punto mediano tra q_1 e q_2. Calcolare il campo elettrico agente su di essa in questa situazione.

Soluzione
Prima di procedere scriviamo in dati nel S.I.. Quest'operazione è importante per evitare errori grossolani nel calcolo finale. Abbiamo $q_1 = q_3 = 7.3\,10^{-6}$ C, $q_2 = -7.3\,10^{-6}$ C e $a = 0.93$ m. Il campo prodotto dalla carica q_1, $\mathbf{E_1}$, ha intensità $E_1 = kq_1/a^2$, analogo a quello prodotto dalla carica q_2, che vale $E_2 = kq_2/a^2$. I campi sono disposti come in Figura 1.3.

Dalla figura si vede subito che, essendo il modulo delle cariche q_1 e q_2 lo stesso, la componente del campo risultante lungo l'altezza del triangolo è nulla, mentre la componente perpendicolare risulta pari al doppio della rispettiva componente del campo prodotto da una di esse.

L'angolo al vertice di un triangolo equilatero è $\theta = pi/3$, per cui la componente perpendicolare del campo si trova semplicemente come

$$E_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{1,2}}{a^2}\sin\frac{\theta}{2}\,. \tag{1.10}$$

Il campo agente sulla carica q_3 ha dunque intensità $E = 2E_{1,2}$ ed è diretto perpendicolarmente alla congiungente le cariche q_1 e q_2. Sostituendo i numeri nei simboli troviamo

$$E = 76\,\frac{\text{kN}}{\text{C}}\,. \tag{1.11}$$

Osserviamo che, per giungere al risultato, è sufficiente sostituire ai simboli i corrispondenti valori espressi nel S.I.. Facendo questo non c'è alcun bisogno di determinare in maniera formale le unità di misura corrette per E. Infatti, esprimendo tutto nel S.I., anche il valore di E sarà espresso nello stesso sistema. Basta quindi scrivere le corrispondenti unità: essendo un campo elettrico una forza diviso una carica è facile trovarne le dimensioni corrette.

Come sempre, il numero di cifre usato per scrivere il risultato è uguale al numero di cifre significative con il quale ci sono stati forniti i dati iniziali (due).

Quando la carica q_3 si sposta sull'asse congiungente le due cariche q_1 e q_2, la distanza di ciascuna carica dal punto in esame diventa $a/2$ e i rispettivi campi sono paralleli e concordi. In altre parole possiamo dire che $\theta = \pi$. Il risultato diventa

$$E = 2\frac{1}{\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{a^2} \tag{1.12}$$

e il campo è diretto in modo da puntare verso la carica q_2.

□

Esercizio 1.0.5

A distanza $R = 47.7$ cm da un filo rettilineo molto lungo e uniformemente carico, il campo elettrico ha intensità $E_0 = 35.4$ kN/C. Quanto vale la densità di carica del filo? A che distanza ci si deve mettere dal filo affinché il campo elettrico sia la metà di quello dato?

<u>*Soluzione*</u>

Scriviamo prima i dati nel S.I.: $R = 0.477$ m e $E_0 = 35.4\,10^3$ N/C. Il filo si può assumere di lunghezza infinita (le parole "molto lungo" suggeriscono che quest'approssimazione sia corretta). Il campo prodotto da un filo rettilineo uniformemente carico si può calcolare con il teorema di Gauss. Si trova che esso è radiale rispetto al filo e vale

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}\,, \tag{1.13}$$

dove r è la distanza dal filo e λ la sua densità di carica. Osserviamo che, a parte il fattore $1/2\pi\epsilon_0$, che si deve ricordare oppure ricavare in qualche modo, è facile trovare l'espressione di E in funzione di λ e r usando semplici argomenti dimensionali. In effetti E può dipendere solo dalla distanza r e dalla densità di carica λ che devono trovarsi in una combinazione tale da avere le dimensioni di una carica diviso una distanza al quadrato. Basta ricordare l'espressione del campo elettrico di una carica puntiforme per giungere a questa conclusione. Essendo $[\lambda] = [Q/L]$, l'unica combinazione di λ e r che dà le giuste dimensioni è proprio λ/r.

Dall'espressione di E si ricava che

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 E_0 R = 9.39\,10^{-7}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\,. \tag{1.14}$$

Per trovare il valore di r per cui E si dimezza possiamo, conoscendo λ, invertire l'espressione (1.13) e ricavare r in funzione dei dati forniti. Piú semplicemente possiamo osservare che E scala come $1/r$, perciò raddoppiando r si dimezza E e quindi $r(E_0/2) = 2r = 95.4$ cm.

□

Esercizio 1.0.6

Trovate il campo elettrico prodotto da un sottile anello di raggio r, uniformemente carico, di carica complessiva Q, sull'asse passante per il suo centro e ad esso perpendicolare. Trovate quindi il campo prodotto da un disco uniformemente carico, di raggio R, con densità superficiale di carica σ.

Soluzione

Se l'anello è uniformemente carico, su ogni elemento di lunghezza dl dell'anello si trova una quantità di carica $dq = \lambda dl$, dove $\lambda = Q/2\pi r$ è la sua densità di carica. Disponiamo l'anello in un sistema di riferimento tridimensionale in modo che giaccia sul piano xy. L'asse dell'anello è dunque l'asse $\hat{\mathbf{z}}$. Un punto di coordinata z su quest'asse dista da ogni carica elementare dq di

$$L = \sqrt{r^2 + z^2}\,. \tag{1.15}$$

Per evidenti ragioni di simmetria il campo è sempre diretto lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$. Infatti, per ogni carica dq sull'anello, se ne trova sempre un'altra nella posizione diametralmente opposta. Ogni carica produce un campo le cui componenti orizzontali sono l'una l'opposto dell'altra. Le componenti verticali invece si sommano. Detto α l'angolo formato dal campo elettrico e l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ abbiamo che ciascuna carica contribuisce per

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2+z^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2+z^2}\cos\alpha\,. \tag{1.16}$$

Integrando in dl

$$E = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r^2+z^2}\cos\alpha\int dl = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\lambda r}{r^2+z^2}\cos\alpha\,. \tag{1.17}$$

Osserviamo che possiamo scrivere $\tan\alpha = r/z$. Facciamo qualche rapido controllo. Dal punto di vista dimensionale, a numeratore c'è una carica (λr) e a numeratore la costante ϵ_0 moltiplicata per una distanza al quadrato. Se facciamo tendere z a zero $\tan\alpha \to \infty$, quindi $\alpha = \pi/2$ e $\cos\alpha = 0$, pertanto il campo al centro dell'anello è nullo, come ci si aspetta.

Se invece $z \to \infty$, $E \to 0$. Anche in questo caso il comportamento è quello atteso: a distanza molto grande il campo tende ad annullarsi. Se, inoltre, $z \gg r$, si può scrivere $\alpha \simeq 0$ e si può trascurare r^2 rispetto a z^2, ottenendo

$$E \simeq \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\lambda r}{z^2}\,, \tag{1.18}$$

da cui si evince, come ancora ci si aspetta, che l'anello si comporta come una carica puntiforme, dal momento che il campo scala come $1/z^2$.

Per calcolare il campo prodotto sull'asse di un disco uniformemente carico procediamo cosí. Dividiamo il disco in tanti anelli sottili, di spessore dr, ciascuno di area $2\pi r dr$. La carica che ciascuno di questi anelli porta è $dq = \sigma 2\pi r dr$ e il campo è la sommatoria di tutti i campi elementari prodotti da ciascuno anello. Ciascun anello produce sull'asse un campo che è dato dall'equazione (1.17) in cui sostituiamo $\lambda 2\pi r$ con dq. In definitiva abbiamo che ciascun anello produce un campo pari a

$$dE = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\sigma r dr}{r^2+z^2}\cos\alpha \tag{1.19}$$

Ricordiamo che α e r dipendono l'uno dall'altro. In questo caso conviene integrare sull'angolo (è piú semplice). Esprimendo tutto in funzione di α abbiamo

$$r = z\tan\alpha \qquad dr = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\,, \tag{1.20}$$

e dunque

$$E = \int dE = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^\theta \sin\alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta) \ , \tag{1.21}$$

dove θ è tale per cui $z \tan\theta = R$. Possiamo anche scrivere $\cos\theta = z/\sqrt{R^2 + z^2}$.

Verifichiamo ancora una volta i casi limite. Prendiamo $z \to 0$. In questo caso il campo tende al valore $\sigma/2\epsilon_0$ che è il campo prodotto da una lastra infinita. In effetti se z è piccolo la distribuzione di carica si può considerare infinita. Per $z \to \infty$ il campo tende a zero (il coseno tende a 1), come ci aspetta visto che la distribuzione, vista da molto lontano, somiglia a quella di una carica puntiforme.

□

Esercizio 1.0.7

Un'asta molto sottile, uniformemente carica, ha forma semicircolare di raggio r. Trovate il valore del campo elettrico nel punto in mezzo alla congiungente i due estremi dell'asta.

<u>*Soluzione*</u>
Il campo elettrico nel punto desiderato è la somma dei campi elettrici elementari in cui possiamo dividere la carica dell'asta. Se chiamiamo dq la carica elementare depositata su un elementino dl di asta, poiché tutti gli elementi distano r dal centro abbiamo

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \, . \tag{1.22}$$

Disponendo l'asta a forma di semicerchio in un sistema di riferimento con l'origine nel punto in cui si vuole calcolare il campo e con l'asse x orientato in modo da giacere sulla congiungente i due estremi, notiamo che le componenti lungo x del campo si annullano a vicenda, mentre le componenti lungo l'asse y si sommano. Detto α l'angolo formato dal vettore campo elettrico con l'asse delle ordinate, abbiamo che la componente y di ciascun campo elementare è

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos\alpha \, , \tag{1.23}$$

e per trovare il campo totale dobbiamo eseguire un'integrazione su α che va da $pi/2$ a $-pi/2$. Per simmetria basterà integrare tra 0 e $pi/2$ e moltiplicare il risultato per due. Dobbiamo però fare attenzione a esprimere correttamente la dipendenza da α di dq, che è l'unica grandezza che può dipendere da questa. In effetti $dq = \lambda dl = \lambda r d\theta$, con $\lambda = Q/\pi r$. Sostituendo

$$dE_y = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cos\alpha d\alpha\,. \tag{1.24}$$

Dal punto di vista dimensionale la correttezza di quest'espressione è manifesta. Integrando tra 0 e $pi/2$ e moltiplicando per due si ottiene

$$E_y = \frac{1}{2\pi^2\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{1.25}$$

□

Esercizio 1.0.8

Una sottile asta metallica di lunghezza L è uniformemente carica. Trovare l'espressione del campo elettrico prodotto. Come varia quest'espressione se la densità di carica non è uniforme, ma varia come $\lambda(x) = \lambda_0(x - L/2)/L$? □

Esercizio 1.0.9

Una superficie S è descritta dall'equazione $z = x^2 + y^2$. Si tratta dunque di un paraboloide con la concavità rivolta verso il basso. Calcolate il flusso del campo elettrico $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$ attraverso la porzione di superficie con $z < z_0$.

<u>*Soluzione*</u>
La soluzione di questo esercizio è piú semplice di quanto possa inizialmente sembrare. A prima vista, per calcolare il flusso Φ richiesto bisognerebbe fare un complesso integrale

$$\Phi_{par} = \int_{paraboloide} d\Phi = \int_{paraboloide} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}\,, \tag{1.26}$$

dove $\mathbf{S}$ è un vettore di modulo dS orientato in modo da risultare perpendicolare alla superficie del paraboloide. In realtà basta osservare che, per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa di forma qualunque è proporzionale alla carica contenuta in essa. Consideriamo la superficie definita dal piano $z = z_0$, parallelo al piano xy e dalla porzione di paraboloide em uscente da questo piano. All'interno di questa superficie chiusa non ci sono cariche, perciò $\Phi = 0$. Ma tale flusso è la somma del flusso attraverso la porzione di superficie definita dal paraboloide Φ_{par} e quella definita dal piano Φ_{Π}

$$0 = \Phi = \Phi_{par} + \Phi_{\Pi}\,, \tag{1.27}$$

per cui $\Phi_{par} = -\Phi_{\Pi}$. Quest'ultimo è facile da calcolare. Infatti il piano xy è perpendicolare a $\mathbf{E}$ e il flusso è dato dalla superficie della porzione di piano interessata $S = \pi R^2$, con $R^2 = x^2 + y^2 = z_0^2$, moltiplicata scalarmente per il modulo del campo elettrico:

$$\Phi_{par} = -\pi z_0^2 E_0\,. \tag{1.28}$$

$\square$