Capitolo 10

Correnti elettriche

10.1 Corrente, densità di corrente e Legge di Ohm

Esercizio 10.1.1

Un centro di calcolo è dotato di un UPS (*Uninterruptible Power Supply*) costituito da un insieme di 20 batterie da 12 V, ciascuna capace di immagazzinare una carica di 72 Ah. Il sistema entra automaticamente in funzione quando la corrente elettrica non viene piú erogata dalla rete per un motivo qualsivoglia (guasto, apertura di interruttori, etc.). Nel centro di calcolo sono ospitate macchine di calcolo, alimentate a 240 V, per una potenza complessiva di 63 kW. Calcolare la durata delle batterie in queste condizioni, trascurando ogni perdita e ogni possibile inefficienza dei sistemi di protezione. Si tratti l'impianto elettrico come un impianto a corrente continua.

Soluzione
La carica immagazzinata nelle batterie si misura in unità di Ah. Che tale unità di misura sia corretta lo si evince dal fatto che l'integrale sul tempo di una corrente ha le dimensioni di una carica. Questa unità di misura è piú comoda rispetto al Coulomb, perché permette di stimare immediatamente la durata della batteria, conoscendo la corrente. Una batteria da 72 Ah corrisponde alla carica che fluisce in 72 ore quando su un filo passa una corrente stazionaria di 1 A.

La potenza richiesta dagli impianti sotto protezione è data da $W = VA$, dove V è la tensione di funzionamento e A la corrente richiesta. Conoscendo W e V possiamo ricavare la corrente necessaria

$$A = \frac{W}{V} \,. \tag{10.1}$$

Nelle $n = 20$ batterie è complessivamente accumulata una carica Q pari a

$$Q = nq \,, \tag{10.2}$$

dove $q = 72$ Ah è la carica immagazzinata in ciascuna di esse. Essendo $I = dQ/dt$ abbiamo, integrando, che $Q = I\Delta t$, dove Q è la quantità di carica che fluisce attraverso il circuito percorso dalla corrente I nel tempo Δt, che è uguale a nq. Abbiamo pertanto

$$\Delta t = \frac{nq}{I} = \frac{nqV}{W} \,. \tag{10.3}$$

Controlliamo le dimensioni fisiche: il numeratore è una corrente per un tempo per una differenza di potenziale. Il denominatore è una differenza di potenziale per una corrente. Il risultato ha dunque le unità di misura di un tempo, il che è corretto. Osserviamo che

$$\lim_{W\to 0} \Delta t = \infty \qquad \lim_{W\to\infty} \Delta t = 0 \,, \tag{10.4}$$

che appare corretto giacché nel primo caso non abbiamo consumo di energia elettrica e dunque le batterie durano un tempo infinito; nel secondo caso, invece, il consumo è elevatissimo e le batterie si scaricano subito.

Prima di passare a calcolare il valore richiesto dobbiamo accertarci di aver espresso tutte le grandezze in un sistema di unità di misura coerente. Essendo 1W = 1 VA possiamo esprimere q in Ah e V in V. Otteniamo

$$\Delta t = \frac{20 \times 72 \times 240}{63 \cdot 10^3} = 5.5\,\mathrm{h} \tag{10.5}$$

È utile osservare che tale stima appare ragionevole se si trascurano tutti gli effetti dissipativi del sistema, come richiesto dal testo del problema. Nella pratica la corrente continua delle batterie deve essere trasformata in corrente alternata da appositi strumenti detti *inverter*. A parte le inefficienze di questi ultimi, si dovrebbe tener conto anche degli inevitabili sfasamenti tra corrente e tensione, che riducono la potenza disponibile. Inoltre quella data risulta essere la potenza di picco e non la potenza *efficace*, che è una misura piú idonea in questo genere di impianti. □

Esercizio 10.1.2

Il raggio di un filo metallico, con resistività ρ uniforme, cresce linearmente lungo tutta la sua lunghezza L da un valore minimo a a un valore massimo b. Dimostrare che la resistenza presentata dal filo è equivalente a quella di un filo di sezione ellittica costante.

Soluzione
La resistenza di un filo elettrico, nota la sua resistività è

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{10.6}$$

dove l è la lunghezza del filo e S la sua sezione. Un elemento infinitesimo di filo dunque presenta una resistenza

$$dR = \rho \frac{dl}{S} \,. \tag{10.7}$$

Nel caso specifico $S = \pi r^2$, con $r = a + \alpha l$. Il coefficiente α si ricava imponendo che $r(L) = b$, da cui

$$\alpha = \frac{b-a}{L} \,. \tag{10.8}$$

La resistenza del filo si trova integrando la (10.7):

$$R = \frac{\rho}{\pi} \int_0^L \frac{dl}{(a+\alpha l)^2} \tag{10.9}$$

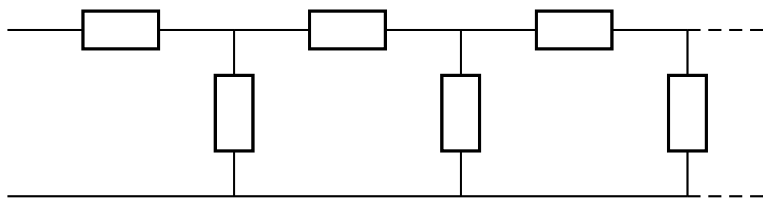
L'integrale si esegue con la sostituzione $a + \alpha l = x$, per cui gli estremi d'integrazione diventano a e b:

$$R = \frac{\rho}{\pi\alpha} \int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\rho \frac{L}{\pi(b-a)} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \rho \frac{L}{\pi ab} \,, \tag{10.10}$$

come volevasi dimostrare, ricordando che $A = \pi ab$ è l'area dell'ellisse di semiassi a e b. □

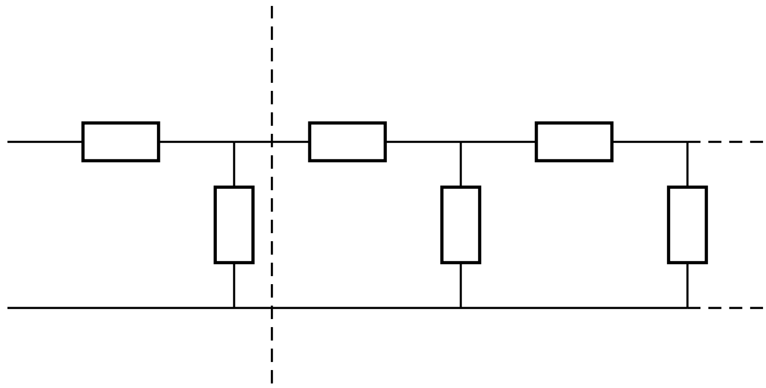
Esercizio 10.1.3

Sia data una rete di resistori tutti uguali come quella in figura che si estende all'infinito verso destra. Calcolare la resistenza equivalente vista da



sinistra.

<u>*Soluzione*</u>
Per risolvere questo problema occorre un po' di esperienza. In molti casi in cui sono presenti sistemi di lunghezza infinita, si può adoperare un semplice *trucco*. Basta osservare che le proprietà di una rete infinita non cambiano se si rimuove dalla rete una parte di essa finita. Tagliamo la rete in un punto tale per cui, a destra di esso, la rete sia identica a quella originale, come nella figura seguente



La rete a destra della linea verticale tratteggiata è identica a quella complessiva. La sua resistenza equivalente si trova in parallelo alla resistenza R disposta verticalmente. Questo parallelo è in serie alla prima resistenza R. Abbiamo dunque

$$R_{eq} = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{eq}}\right)^{-1}. \tag{10.11}$$

Risolvendo l'equazione si trovano due soluzioni

$$R_{eq} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} R. \tag{10.12}$$

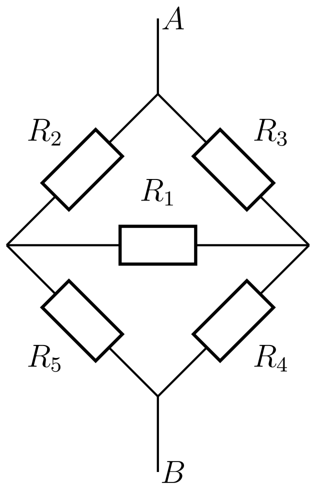
Considerando che $R > 0$ solo una delle due equazioni è accettabile: quella con il segno $+$, per cui $R_{eq} = R/2(1+\sqrt{5})$. Questa stessa tecnica di soluzione si applica in molti casi analoghi a questo.

□

Esercizio 10.1.4

▶ Vedi 10.1.7

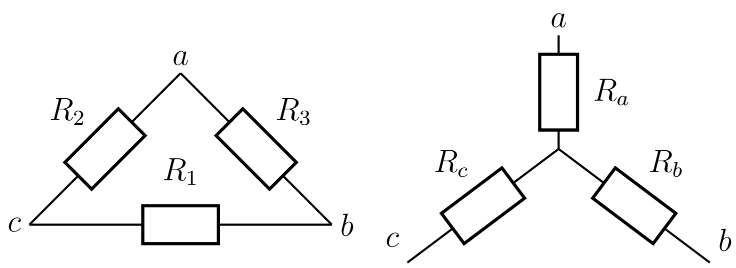
Calcolare la resistenza equivalente misurata ai capi A e B della rete di resistori mostrata in figura



Analizzare esplicitamente i casi $R_1 = 0$ e $R_1 = \infty$.

<u>*Soluzione*</u>

La rete data non è facilmente riducibile a un solo resistore. I resistori della rete non sono, tra loro, né in serie né in parallelo. Per comprenderlo possiamo procedere in questo modo: immaginiamo di iniettare una corrente nel punto A. Questa si divide in due rami che passano attraverso i resistori R_2 e R_3. Una parte di entrambe passa per R_1 (l'una da destra e l'altra da sinistra), quindi almeno in parte la corrente passante per R_2 si *mescola*, nello stesso elemento circuitale, con quella passante in R_3 e viceversa. Ciò non succede mai quando le resistenze sono in serie o in parallelo. In due elementi in serie la corrente che esce da un elemento entra tutta nell'altro. In due elementi in parallelo le due correnti che li attraversano si rimescolano, ma solo dopo aver attraversato gli elementi. Allo scopo di ridurre il circuito a un circuito piú semplice dobbiamo dunque eliminare i nodi a causa dei quali avviene il mescolamento. È dunque necessario trasformare la rete triangolare $R_2 - R_1 - R_3$ in una rete equivalente di forma diversa. Per realizzare lo scopo, la rete equivalente deve avere sempre tre nodi (in modo da poterla sostituire a quella del problema), ma non deve avere un ramo corrispondente alla base del triangolo. Una possibilità consiste nel trasformarla in una rete a forma di *stella*. Si tratta, in effetti, di una trasformazione ben nota. Per calcolarne gli elementi riportiamo il disegno della parte di circuito che ci interessa, indicandone i nodi con le lettere dell'alfabeto latino, e il disegno della rete a forma di stella equivalente, indicandone i nodi corrispondenti con le lettere dell'alfabeto greco.



Affinché le due reti siano equivalenti le resistenze viste da coppie di punti omologhe devono essere uguali. La resistenza R^s_{ac} vista dai punti a e c della rete di sinistra è R_2 in parallelo con la serie $R_1 + R_3$, $R^s_{ac} = R_2(R_1 + R_3)/(R_1 + R_2 + R_3)$. Questa resistenza deve essere identica a quella R^d_{ac} vista dagli stessi punti nel circuito di destra, che è semplicemente la serie $R_a + R_c$ (Attenzione: un errore molto comune consiste nell'includere anche la resistenza R_b; tuttavia, se si applica una differenza di potenziale ai punti a e c e si lascia b *volante*, nel circuito scorre una corrente solo attraverso R_a e R_c). Essendo $R^s_{ac} = R^s_{ac}$, abbiamo dunque

$$\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} = R_a + R_c\,. \tag{10.13}$$

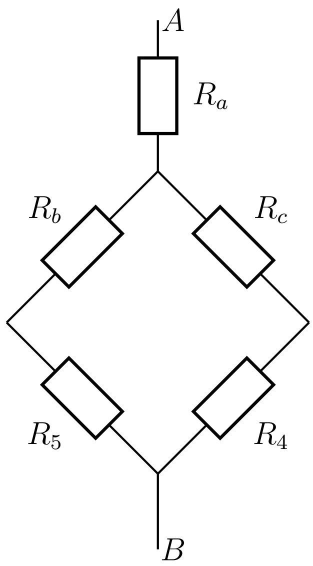
Analogamente, calcolando la resistenza vista dai punti (a, b) e (b, c) otteniamo altre due relazioni

$$\begin{aligned} \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} &= R_a + R_b \\ \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} &= R_b + R_c \end{aligned} \tag{10.14}$$

Abbiamo cosí un sistema di tre equazioni nelle tre incognite R_a, R_b e R_c. Notate che la rete è simmetrica per rotazioni e che anche le formule che dànno le resistenze equivalenti lo sono per rotazione degli indici. Risolvendolo si trova

$$R_a = \frac{R_2 R_3}{R_1+R_2+R_3}\,, \quad R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1+R_2+R_3}\,, \quad R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2+R_3}\,. \tag{10.15}$$

Ora che abbiamo la trasformazione possiamo ridisegnare il circuito usando la rete di destra al posto del triangolo in alto:



La resistenza equivalente di questa rete si ottiene facilmente come

$$R_{eq} = R_a + \left(\frac{1}{R_b + R_5} + \frac{1}{R_c + R_4} \right)^{-1} . \tag{10.16}$$

Dopo aver verificato le dimensioni del risultato, discutiamo i casi particolari. Nel caso $R_1 = 0$ i punti c e b della rete si trovano allo stesso potenziale. Pertanto la rete si riduce alla serie del parallelo $R_2||R_3$ e del parallelo $R_4||R_5$. Dalle formule 10.15 si vede, in effetti, che della stella sopravvive solo R_a. In altre parole, la stella si trasforma in un semplice ramo di resistenza R_a, che è proprio la resistenza equivalente del parallelo $R_2||R_3$. Per simmetria è del tutto evidente che la stessa trasformazione si può applicare al triangolo inferiore, ottenendo come risultato il parallelo $R_4||R_5$.

Nel caso $R_1 = \infty$ il circuito è ancora piú semplice: questo caso equivale a rimuovere il resistore R_1, facendo diventare il circuito equivalente al parallelo delle serie $R_2 + R_5$ e $R_3 + R_4$.

Impiegando la stessa tecnica per calcolare la trasformazione inversa, da stella a triangolo. Dovreste ottenere le seguenti leggi di trasformazione:

$$R_1 = \frac{R_a}{R^2} \quad R_2 = \frac{R_b}{R^2} \quad R_3 = \frac{R_c}{R^2} \, . \tag{10.17}$$

dove $R^2 = R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c$.

Esempio numerico

Calcolare la resistenza equivalente nel caso $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10\ \Omega$ e $R_1 = 220\ \Omega$. Calcoliamo prima le resistenze equivalenti della stella. Esprimendo R_{eq} in termini di R_i, $i = 1, \ldots, 5$ otterremmo un'espressiome troppo complicata.

$$R_a = 0.42\,\Omega \, , \quad R_b = R_c = 9.17\,\Omega \, . \tag{10.18}$$

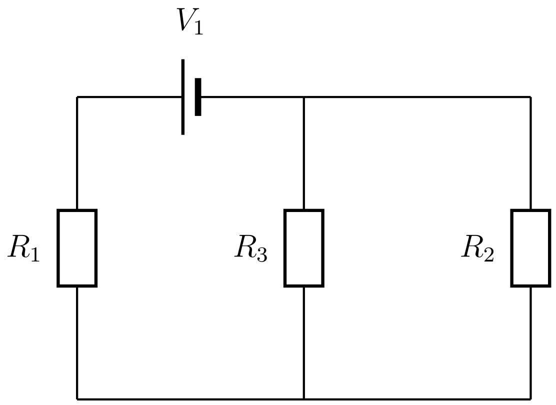
da cui si ottiene che

$$R_{eq} = 10\,\Omega \tag{10.19}$$

□

Esercizio 10.1.5

▶ Vedi 10.1.6



Si consideri il circuito in figura, dove $V_1 = 6$ V, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$ e $R_3 = 1\,\Omega$.

Si calcolino le correnti che attraversano i tre resistori. Si valuti la potenza erogata dal generatore.

<u>*Soluzione*</u>

In questo circuito è presente un solo generatore. Questo indica che la soluzione può essere trovata riducendone lo schema a uno piú semplice, attraverso un circuito equivalente. La presenza di un solo generatore è una condizione sufficiente, ma non necessaria per procedere in questo modo. È infatti possibile che nello schema siano presenti due o piú generatori, e che il circuito possa comunque essere ridotto a uno equivalente. La prima cosa da fare, dunque, è quella di identificare gli elementi del circuito che possono essere eliminati per mezzo di elementi loro equivalenti.

Nel caso specifico osserviamo che i resistori R_3 e R_2 sono tra loro in parallelo. La differenza di potenziale ai loro capi, infatti, è la stessa. Possiamo dunque sostituire questa coppia di resistori con un unico resistore R_p tale che

$$R_p = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\,. \tag{10.20}$$

Il calcolo della resistenza equivalente di due o piú resistori in parallelo è spesso fonte di errori. Un errore molto comune consiste nel calcolare la somma degli inversi delle resistenze e di dimenticare di invertire il risultato. In questi casi l'analisi dimensionale viene in nostro soccorso. Basta verificare che il risultato abbia le dimensioni di una resistenza, come nel caso dell'equazione (10.20), in cui al numeratore c'è una resistenza al quadrato, mentre al denominatore abbiamo una resistenza.

La resistenza cosí trovata si viene a trovare in serie a R_1. Infatti tutta la corrente che attraversa il parallelo deve per forza attraversare anche R_1. Pertanto il circuito si riduce a un circuito con un solo resistore di resistenza

$$R_{eq} = R_p + R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1 = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_2 + R_3} \,. \tag{10.21}$$

La corrente erogata dal generatore è quindi data dalla legge di Ohm:

$$I = \frac{V_1}{R_{eq}} = V_1 \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3} \,, \tag{10.22}$$

dalla cui espressione è evidente che è dimensionalmente corretta. Questo risultato permette di ricavare subito la potenza impegnata W, essendo $W = V_1 I$. Avendo già tutte le grandezze espresse nel S.I. possiamo limitarci a sostituire i valori ai simboli per trovare che $W = 13$ W. Si noti che abbiamo approssimato il risultato allo stesso numero di cifre significative impiegate per i dati del problema.

Per valutare le correnti che passano in ciascun resistore possiamo procedere nel modo seguente. Dal circuito è evidente che tutta la corrente erogata dal generatore passa inevitabilmente per R_1. Pertanto la corrente I_1 che attraversa R_1 è $I_1 = I = 2.14$ A (in questo caso abbiamo usato piú cifre significative perché il risultato ci servirà per i calcoli successivi e non vogliamo perdere precisione.

Questa stessa corrente entra poi nel parallelo tra R_2 e R_3. La corrente tende a passare di piú attraverso la resistenza piú bassa e la legge di Ohm ci dice che il rapporto tra la corrente che passa attraverso due resistenze in parallelo è uguale al rapporto inverso delle resistenze:

$$\frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2} \tag{10.23}$$

da cui segue che

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2} I_3 \,. \tag{10.24}$$

Sappiamo, inoltre, che $I_2 + I_3 = I_1$, pertanto $I_3 = I_1 - I_2$. Sostituendo nella (10.24) e riorganizzando i termini si trova

$$I_2 = \frac{R_3 I_1}{R_2 + R_3} = 0.428\,\mathrm{A}\,. \tag{10.25}$$

Nel calcolare l'ultimo risultato abbiamo lasciato tutte le cifre significative derivanti dal rapporto per poter eseguire il controllo finale. È abbastanza evidente che

$$I_3 = \frac{R_2 I_1}{R_2 + R_3} = 1.712\,\mathrm{A}\,. \tag{10.26}$$

Osserviamo che $1.712 + 0.428 = 2.14$, come ci si aspetta. In effetti, sapendo che $I_1 = I_2 + I_3$ si poteva calcolare I_3 per differenza, una volta note I_1 e I_2. Cosí facendo, peró, abbiamo avuto l'opportunità di fare una verifica della correttezza dei nostri calcoli. Oltre al controllo dimensionale, in questi casi vale anche la pena fare un altro tipo di controllo: siccome l'espressione della corrente è simmetrica per lo scambio degli indici, è necessario che le due espressioni delle correnti risultino identiche scambiando l'indice 2 con l'indice 3.

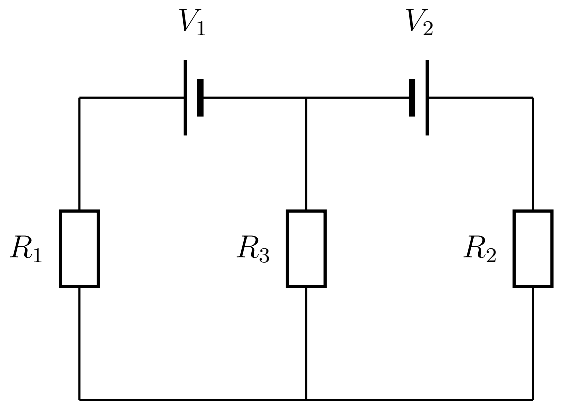
Per finire esprimiamo il risultato finale con il corretto numero di cifre:

$$I_2 = 0.43\,\mathrm{A}\,, \qquad I_3 = 1.71\,\mathrm{A}\,. \tag{10.27}$$

In considerazione del fatto che l'esercizio ci chiede di valutare la corrente che passa in ciascuna delle resistenze, una possibile alternativa alla soluzione di questo problema può essere quella di trattarlo come un circuito a due maglie, da risolvere impiegando i principi di Kirchhoff (vedi problema seguente). □

Esercizio 10.1.6

▶ Vedi 10.1.5
Si consideri il circuito in figura, dove $V_1 = 6$ V, $V_2 = 1$ V, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$ e $R_3 = 1\,\Omega$.



Si calcolino le correnti che attraversano i tre resistori. Si valuti la potenza erogata dai due generatori. Calcolare le medesime quantità quando il generatore V_2 viene sostituito da un corto circuito. Quanto valgono le correnti che attraversano i resistori quando il generatore V_2 viene sostituito da un condensatore, trascorso un tempo molto lungo dal momento in cui il circuito è alimentato?

<u>*Soluzione*</u>
La soluzione dei circuiti con piú maglie richiede l'uso dei princípi di Kirchhoff. Innanzitutto occorre saper riconoscere un circuito a piú maglie da un circuito riducibile a un circuito con una sola maglia. Il primo indizio consiste nella presenza di piú di un generatore. Questo però non basta. È necessario che i diversi generatori si trovino su maglie diverse. Se, ad esempio, avessimo avuto il generatore V_2 in serie a V_1 sarebbe stato sufficiente sommare algebricamente le differenza di potenziale dei due generatori per ridurre il circuito a quello visto nell'esercizio 10.1.5. Nel nostro caso il generatore V_2 non è in serie a V_1 perché la corrente che attraversa l'uno non è uguale a quella che attraversa l'altro. La corrente in uscita (o in entrata, secondo i versi) da V_1 si divide nel nodo presente in alto, tra i generatori: una parte attraversa V_2 mentre l'altra attraversa R_3.

Detto questo passiamo alla strategia di risoluzione. Per prima cosa dobbiamo scrivere tante equazioni quante sono le maglie indipendenti. Nel circuito sono presenti tre possibili maglie:

1. la maglia *esterna*, composta da R_1, V_1, V_2 e R_2;
2. la maglia *di sinistra*, composta da R_1, V_1 e R_3;
3. la maglia *di destra*, composta da R_3, V_2 e R_2.

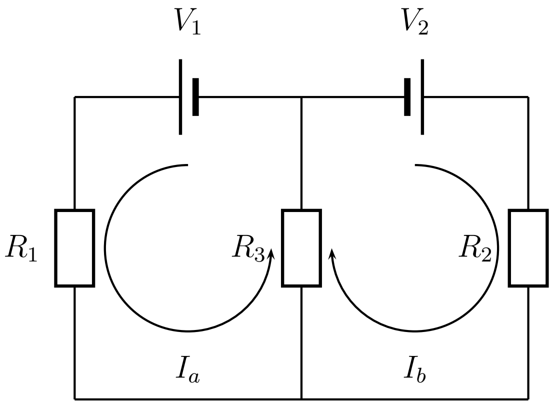
La scelta delle maglie è ovviamente arbitraria, ma seguendo pochi e semplici suggerimenti si riduce la probabilità di commettere errori grossolani, dovuti per lo piú a distrazione. La scelta deve cadere sulle maglie che hanno il maggior numero di componenti per i quali è richiesta una soluzione oppure sulle maglie che permettono di minimizzare il numero di componenti da includere nel calcolo. Nel caso specifico la maglia esterna possiede quattro componenti (contro i tre delle altre). Conviene perciò scegliere le altre due. Se avessimo deciso di includerla comunque nella scelta, avremmo invece dovuto analizzarla insieme alla maglia di sinistra, perché scegliendo la maglia di destra R_3 non comparirebbe mai nelle equazioni. Questo significa che il valore della corrente che scorre in R_3 dovrebbe essere ricavato sfruttando il primo principio di Kirchhoff, aggiungendo inutilmente dei calcoli alla soluzione del problema.

Facciamo dunque la scelta di impiegare le due maglie indicate con i numeri 2 e 3 nella lista. A questo punto dobbiamo indicare due correnti, una per maglia, scegliendone arbitrariamente il verso. Anche in questo caso, per semplificare i conti, conviene scegliere il verso delle correnti in modo tale che sia uscente dal generatore con la massima differenza di potenziale incluso nella maglia. Nella maglia 2 scegliamo una corrente, che chiamiamo I_a, circolante in verso anti–orario; nella maglia 3 scegliamo invece il verso orario per la corrente I_b, come nella figura che segue

A questo punto, per impostare le equazioni delle maglie procediamo nel modo seguente: partendo dal generatore con la differenza di potenziale piú alta di ciascuna maglia[1] sommiamo algebricamente le differenza di potenziale prendendo come positive quelle dei generatori nei quali la corrente della maglia passa dal polo negativo a quello positivo.

Nella maglia 2 il valore della differenza di potenziale , preso col segno $+$, è V_1. Nella maglia 3 V_2 va preso anch'esso col segno positivo. Questi valori

[1]Nel nostro caso ne abbiamo uno solo per maglia.



costituiranno il primo membro di ciascuna equazione. Avremo dunque un sistema del tipo

$$\begin{cases} V_1 = \ldots \\ V_2 = \ldots \end{cases} \tag{10.28}$$

Il secondo membro di ciascuna equazione si ottiene sommando le cadute di potenziale su ciascuna resistenza. Nella maglia 2 abbiamo che la corrente I_a attraversa sia R_1 che R_3; quest'ultimo resistore è attraversato anche da I_b, che ha lo stesso verso di I_a, perciò

$$V_1 = I_a(R_1 + R_3) + I_bR_3\,. \tag{10.29}$$

Analogamente nella maglia 3 la corrente I_b attraversa sia R_2 che R_3, la quale è attraversata anche da I_a, nello stesso verso di I_b:

$$V_2 = I_b(R_2 + R_3) + I_aR_3\,. \tag{10.30}$$

Dobbiamo pertanto risolvere il sistema

$$\begin{cases} V_1 = I_a(R_1 + R_3) + I_bR_3 \\ V_2 = I_aR_3 + I_b(R_2 + R_3) \end{cases} \tag{10.31}$$

Nello scrivere il sistema fate attenzione a ordinare i termini in modo che ciascuna variabile compaia sulla stessa colonna. Un errore molto comune consiste nel non badare a questo dettaglio e usare i coefficienti sbagliati. Per prima cosa calcoliamo il determinante $\det A$ della matrice dei coefficienti A:

$$\det A = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = (R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2 \tag{10.32}$$

Le soluzioni si trovano immediatamente, calcolando i determinanti delle matrici dei coefficienti cui sono state sostituite le rispettive colonne dei termini noti:

$$\begin{cases} I_a = \dfrac{1}{\det A} \begin{vmatrix} V_1 & R_3 \\ V_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = \dfrac{V_1(R_2 + R_3) - R_3 V_2}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2} \\ I_b = \dfrac{1}{\det A} \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & V_1 \\ R_3 & V_2 \end{vmatrix} = \dfrac{V_2(R_1 + R_3) - R_3 V_1}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2} \end{cases} \tag{10.33}$$

Notate come, ancora una volta, le due espressioni siano simmetriche nello scambio degli indici. Per rispondere alle domande del problema basta osservare che $I_1 = I_a$, $I_2 = I_b$ e $I_3 = I_a + I_b$, per cui $I_1 = 2.07$ A, $I_2 = -0.21$ A e dunque $I_3 = 1.86$ A. Corrispondentemente la potenza erogata dal generatore V_1 è $W_1 = |V_1 I_1| = 12.4$ W, mentre V_2 eroga $W_2 = |V_2 I_2| = 0.21$ W.

Il segno negativo di I_2, che ricordiamo coincide con I_b, indica che la corrente in R_2 scorre al contrario rispetto a come l'abbiamo disegnata noi.

Sostituire il generatore V_2 con un corto circuito significa eliminarlo, inserendo al suo posto un filo. In questo caso il problema diventa identico a quello esaminato nell'Esercizio 10.1.5. Facciamo vedere come lo si può risolvere utilizzando sempre i princípi di Kirchhoff. In questo caso tale tecnica può essere vantaggiosa perché, benché il circuito sia riconducibile a un circuito piú semplice, con un solo resistore, il problema chiede di conoscere grandezze relative a tutti gli elementi circuitali presenti.

Per quanto abbiamo detto sopra possiamo scegliere di nuovo le due maglie 2 e 3, oppure 1 e 2. Proviamo ad adoperare queste ultime due. La corrente che circola nella maglia 2 sia I_a, orientata come nella soluzione della prima parte dell'esercizio. Secondo le nostre regole, per la corrente che circola nella maglia 1 dobbiamo sceglierne una che percorra la maglia in senso anti–orario (chiamiamola I_c). Le equazioni di ciascuna maglia sono, ricordando di lasciare a sinistra le differenza di potenziale e a destra le cadute di potenziale prese tutte nel verso della corrente che circola in ciascuna maglia:

$$\begin{cases} V_1 = (I_a + I_c)R_1 + I_a R_3 \\ V_1 = (I_a + I_c)R_1 + I_c R_2 \end{cases} \tag{10.34}$$

Ordiniamo i termini in modo da rendere evidente la matrice dei coefficienti:

$$\begin{cases} V_1 = (R_1 + R_3)I_a + R_1 I_c \\ V_1 = R_1 I_a + (R_1 + R_2)I_c \end{cases} \tag{10.35}$$

Risolvendo come prima otteniamo

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{V_1 R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} = 1.71\,\text{A} \\ I_c &= \frac{V_1 R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} = 0.43\,\text{A} \end{aligned} \tag{10.36}$$

Ora osserviamo che $I_1 = I_a + I_c = 2.14$ A, $I_2 = I_c$ e $I_3 = I_c$. Abbiamo cosí ottenuto, come doveva, lo stesso risultato dell'Esercizio 10.1.5. Abbiamo ridotto il numero di passaggi, perché abbiamo ottenuto direttamente il risultato voluto, al prezzo di una maggiore complessità matematica, avendo dovuto risolvere un sistema di equazioni.

Passiamo ora alla soluzione dell'ultimo quesito. Una capacità in un circuito a corrente continua equivale, dopo un tempo sufficientemente lungo, a un'interruzione della contnuità elettrica. Inizialmente, infatti, quando il generatore V_1 viene connesso al circuito, il condensatore si carica. Raggiunta la massima carica possibile $Q = CV$, dove C è la sua capacità e V la differenza di potenziale ai suoi capi, il condensatore inizia a scaricarsi secondo la legge $Q(t) = Q(0)e^{-t/\tau}$ dove τ ha le dimensioni di un tempo e dipende da C e dalla resistenza equivalente vista dal condensatore. Trascorso un tempo molto lungo la carica residua è nulla e perciò $V \to \infty$ ed è come se il circuito fosse aperto. La corrente dunque passa solo nella maglia sinistra. Abbiamo un'unica equazione:

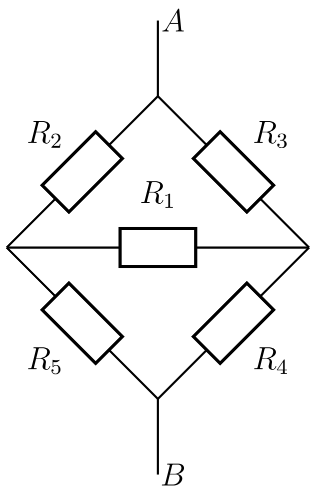
$$V_1 = I_a(R_1 + R_3) \tag{10.37}$$

da cui si ottiene che $I_a = V_1/(R_1 + R_3) = 2$ A. Nei resistori R_1 e R_3 scorre la medesima corrente pari a I_a. Nel resistore R_2, invece, non passa corrente. □

Esercizio 10.1.7

▶ Vedi 10.1.4

Calcolare la resistenza equivalente misurata ai capi A e B della rete di resistori mostrata in figura, quando $R1 = 220\ \Omega$ e $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10\ \Omega$.



<u>*Soluzione*</u>
La soluzione di questo esercizio, anche in assenza in generatori, si può affrontare usando i princípi di Kirchhoff. Se applicassimo ai punti A e B una differenza di potenziale avremmo un circuito con tre maglie indipendenti. Secondo le nostre convenzioni conviene scegliere le maglie con il minor numero possibile di componenti che includano quelli a cui siamo interessati.

Una di queste è quella formata dal generatore e dalle resistenze R_3 e R_4. Un'altra, analoga, contiene il generatore e le resistenze R_2 e R_5. Come terza maglia possiamo scegliere la maglia triangolare $R_1 - R_2 - R_3$. Supponiamo $V(A) > V(B)$, per cui, secondo le nostre regole, le correnti in ciascuna maglia circolano in senso antiorario[2]. Con ovvio significato dei simboli, scriviamo le equazioni delle tre maglie:

$$\begin{cases} V = I_a(R_3 + R_4) - I_c R_3 \\ V = I_b(R_2 + R_5) + I_c R_2 \\ 0 = I_c(R_1 + R_2 + R_3) - I_a R_3 + I_b R_2 \end{cases} \tag{10.38}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{pmatrix} R_3 + R_4 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 + R_5 & R_2 \\ -R_3 & R_2 & R_1 + R_2 + R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -10 \\ 0 & 20 & 10 \\ -10 & 10 & 30 \end{pmatrix} \tag{10.39}$$

[2]Il verso della corrente nella maglia triangolare è irrilevante.

il cui determinante è 8000. Prima di procedere osserviamo che il circuito deve presentare una resistenza $R_{eq} = V/I$ dove I è la corrente entrante nel nodo A, pari quindi a $I_a + I_b$. Ci basta dunque conoscere queste due correnti per risolvere l'esercizio.

$$I_a = \frac{1}{8000} \det \begin{pmatrix} V & 0 & -10 \\ V & 20 & 10 \\ 0 & 10 & 30 \end{pmatrix} = \frac{V}{20}, \tag{10.40}$$

$$I_b = \frac{1}{8000} \det \begin{pmatrix} 20 & V & -10 \\ 0 & V & 10 \\ -10 & 0 & 30 \end{pmatrix} = \frac{V}{20}, \tag{10.41}$$

da cui si ottiene che $I = V/10$, ed essendo $R = V/I$, $R = 10\ \Omega$. Ancora una volta la decisione su come procedere dipende dalla nostra confidenza con gli strumenti matematici. Confrontando la soluzione di questo esercizio con quella dell'Esercizio 10.1.4 si capisce che in questo caso i calcoli sono piú semplici, ma occorre fare ricorso alla soluzione di un sistema di equazioni ed è richiesta una buona capacità di analisi del problema dal punto di vista della fisica. Nel caso della soluzione dell'Esercizio 10.1.4 la soluzione è piú laboriosa, ma non richiede sforzi *interpretativi*. □

Esercizio 10.1.8

► Vedi 10.1.8 ► Vedi 10.1.9

Un generatore di tensione costante V_0 è connesso, all'istante $t = 0$ a un circuito formato dalla serie di un resistore, un condensatore e un induttore, rispettivamente di resistenza R, di capacità C e induttanza L. Trovare l'andamento della corrente in funzione del tempo e della differenza di potenziale ai capi di ciascuno dei componenti.

Tracciare un grafico della differenza di potenziale ai capi del resistore quando $V_0 = 10$ V per le combinazioni seguenti: 1) $L =$470 nH, $R =$100 Ω, $C =$ 220 pF; 2) $L =$470 nH, $R =$100 Ω, $C =$ 80 pF e 3) $L =$470 nH, $R =$40 Ω, $C =$ 47 pF.

<u>*Soluzione*</u>
Il circuito di questo esercizio è costituito di una sola maglia. In essa sono presenti due differenza di potenziale e due elementi attraverso i quali scorre una corrente. Le differenza di potenziale sono fornite dal generatore V_0 e