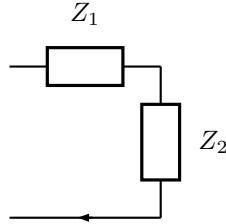


Il circuito a scaletta e la linea di trasmissione

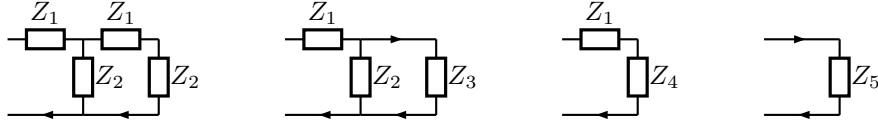
Giovanni Organtini

14 novembre 2006

Consideriamo un circuito con due impedenze Z_1 e Z_2 in serie, come in figura



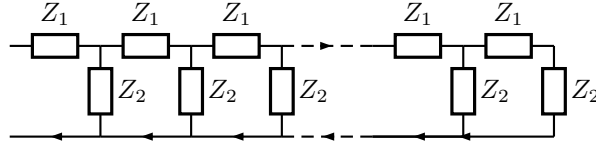
Il circuito è del tutto equivalente a uno in cui sia presente una sola impedenza equivalente $Z_3 = Z_1 + Z_2$. Anche se si monta in parallelo a Z_2 un circuito del tutto identico si potrà rappresentare il tutto come un circuito in cui sia presente una sola impedenza equivalente. Osservando la figura seguente



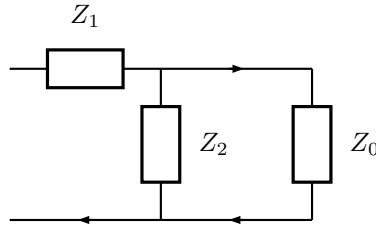
procedendo da sinistra verso destra, si può vedere come inizialmente il circuito si può trasformare nella serie di Z_1 con il parallelo di Z_2 e Z_3 (sostituendo alla serie di destra l'impedenza equivalente Z_3); quindi nella serie di Z_1 e Z_4 (in cui Z_4 è l'impedenza equivalente del parallelo di Z_2 e Z_3) e infine nell'unica impedenza Z_5 ottenuta sostituendo alla serie Z_1 , Z_4 la sua impedenza equivalente:

$$Z_5 = Z_1 + Z_4 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = Z_1 + \frac{(Z_1 + Z_2) Z_2}{Z_1 + 2Z_2}.$$

Naturalmente nulla vieta di pensare che, di circuiti serie Z_1 , Z_2 se ne possano montare infiniti in parallelo l'uno con l'impedenza Z_2 del precedente:



In ogni caso un tale circuito sarebbe del tutto equivalente a un circuito con un'unica impedenza Z_0 , cui possiamo aggiungere, sulla sinistra, un'ulteriore sezione:



Siccome Z_0 è formata dal parallelo di infiniti elementi, se a esso se ne aggiunge uno identico, non può cambiare, perciò si deve avere che

$$Z_0 = Z_1 + \frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2},$$

da cui si ricava che

$$(Z_0 + Z_2) Z_0 = (Z_0 + Z_2) Z_1 + Z_0 Z_2.$$

Raccogliendo tutti i termini a sinistra si ottiene un'equazione di secondo grado:

$$Z_0^2 - Z_1 Z_0 - Z_1 Z_2 = 0,$$

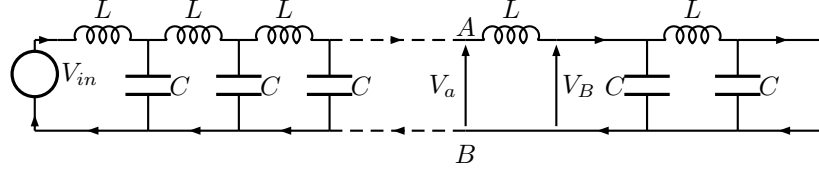
delle cui due soluzioni una è negativa (e dunque non è fisica e va scartata) e l'altra è

$$Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + Z_1 Z_2}.$$

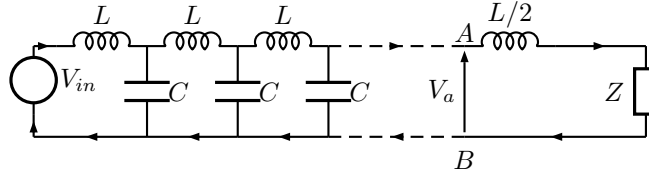
Se, ad esempio, Z_1 è un induttore e Z_2 un condensatore, si avrà che

$$Z_0 = i\frac{\omega L}{2} + \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} = i\frac{\omega L}{2} + \sqrt{\Delta^2},$$

che si può sempre interpretare come la serie di un'induttore d'impedenza $i\omega L/2$ con un circuito d'impedenza Δ . Se $\Delta^2 \geq 0$, cioè $\omega^2 \leq \frac{4}{LC}$, il circuito si comporta come una resistenza. Se, invece, $\Delta^2 \leq 0$, allora il circuito ha impedenza puramente immaginaria. Per comprendere il significato fisico di questi due casi immaginiamo di connettere a sinistra dell'infinita catena di componenti un generatore e consideriamo un generico tratto della catena, preceduto e seguito da infiniti tratti tutti uguali.



Chiamiamo V_a la differenza di potenziale ai capi (A, B) , all'ingresso del generico tratto e V_b quella esistente all'uscita della singola sezione, ai capi del condensatore. Dai terminali (A, B) verso destra il circuito è equivalente a un'induttore di induttanza $L/2$ in serie a un'impedenza $Z = \sqrt{\Delta^2}$:



Perciò si deve avere che

$$V_a = \left(i\omega \frac{L}{2} + Z \right) I.$$

D'altra parte la differenza di potenziale tra V_b e V_a è pari alla caduta di tensione sull'induttanza

$$V_b = V_a - i\omega LI,$$

da cui si ricava che

$$\frac{V_a - V_b}{V_a} = 1 - \frac{V_b}{V_a} = \frac{-i\omega L}{i\omega \frac{L}{2} + Z}.$$

Il rapporto tra la tensione all'uscita e all'ingresso di ciascuna sezione elementare del circuito è pertanto

$$\frac{V_b}{V_a} = 1 - \frac{i\omega L}{i\omega \frac{L}{2} + Z} = \frac{-i\omega \frac{L}{2} + Z}{i\omega \frac{L}{2} + Z}.$$

Se Z è un numero reale, cioè a basse frequenze, il modulo quadro di questo rapporto vale 1. Se, al contrario, $Z = i\alpha$ è immaginario si ha che

$$R = \frac{-i(\omega \frac{L}{2} - \alpha)}{i(\omega \frac{L}{2} + \alpha)}$$

e il suo modulo è minore o uguale a 1. Quindi la rete funziona da filtro attenuando le frequenze alte. In altre parole quando la rete si comporta come una resistenza assorbe energia dal generatore e la trasporta verso destra, senza attenuarla. Quando invece si comporta come un'impedenza immaginaria, il potenziale all'ingresso del circuito via via diminuisce fino a diventare nullo per frequenze infinite.

Dal punto di vista fisico il comportamento del circuito si può immaginare così: a basse frequenze le induttanze *appaiono* come dei fili elettrici di resistenza piccola (è come se l'avvolgimento fosse *stirato*) e il campo magnetico prodotto è trascurabile. In queste condizioni il circuito funziona come un generatore in serie a una piccola resistenza. Il potenziale all'uscita di questo circuito è perciò identico a quello del generatore. Ad alte frequenze, invece, le induttanze usano parte dell'energia che ricevono dal generatore per produrre il campo magnetico. Supponiamo di chiudere il circuito in un dato istante t_0 : inizialmente delle cariche cominciano a fluire verso destra, uscendo dal generatore. Questa variazione di corrente produce un campo magnetico nell'induttanza che, a sua volta, crea una corrente nel circuito che si oppone a quella che ha prodotto il campo magnetico. In uscita dalla prima induttanza perciò la corrente è già un poco più piccola. Lo stesso accade con la seconda induttanza che fa fluire una corrente ancora più piccola e così via all'infinito.

Benché dunque il circuito sia assimilabile a un'unica impedenza complessa, in esso fluisce una corrente che non è uguale in tutti i punti del circuito, contrariamente a quanto ci saremmo aspettati dalle leggi di Kirchhoff. Il fatto è che le leggi di Kirchhoff sono state scritte assumendo che l'integrale su una linea chiusa del campo elettrico sia nullo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

cioè che la somma delle cadute di potenziale sul circuito sia nulla, ma questo è vero solo se nello spazio circostante il campo magnetico è nullo. Se la corrente che passa nel conduttore varia, si crea un campo magnetico attorno al conduttore e l'integrale su una linea chiusa del campo elettrico dipende dalla variazione del flusso del campo magnetico. Risulta perciò possibile che, all'interno del conduttore che forma la serie di induttanze del circuito che abbiamo studiato, la corrente sia diversa da punto a punto.

Il circuito che abbiamo appena analizzato può apparire piuttosto astratto, ma in realtà esso rappresenta molto bene un cavo coassiale. Per questo è in-

teressante studiarlo. Un cavo coassiale infatti è un conduttore cilindrico cavo, al cui interno si trova un altro conduttore cilindrico, in asse con quello esterno. La presenza dei due conduttori affacciati rende il sistema assimilabile a un condensatore le cui armature sono i due conduttori. Il cilindro interno si comporta poi come un'induttanza perché la corrente che vi scorre produce un campo magnetico che resta *imprigionato* all'interno. Possiamo pensare a un tratto infinitesimo di cavo coassiale come una coppia induttore-condensatore e un cavo di lunghezza finita come una serie infinita di questi tratti. Un cavo coassiale ha una capacità e una induttanza che crescono linearmente con la loro lunghezza: $C = C_x \Delta X$ e $L = L_x \Delta X$ dove C_x e L_x sono la capacità e l'induttanza per unità di lunghezza del cavo e ΔX la sua lunghezza. Sostituendo nell'espressione di Z_0 :

$$Z_0 = i \frac{\omega L}{2} + \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} = i \frac{\omega L_x \Delta X}{2} \sqrt{\frac{L_x}{C_x} - \frac{\omega^2 L_x^2 \Delta X^2}{4}}.$$

Ora $L_x \Delta X$ è l'induttanza di un singolo tratto di cavo. Considerarlo di lunghezza infinitesima equivale a fare il limite per $\Delta X \rightarrow 0$. Se facciamo questo limite Z_0 diventa reale e pari a $\sqrt{L_x/C_x}$, indipendentemente dalla frequenza del segnale. I cavi coassiali, pertanto, si comportano sempre come resistenze e non attenuano il segnale, qualunque sia la sua frequenza. Per questo si impiegano nel trasporto di segnali da un dispositivo elettrico a un altro, al posto dei comuni fili elettrici che, al contrario, in presenza di segnali ad alta frequenza, comincerebbero a irraggiare onde elettromagnetiche come un'antenna.

Chiediamoci ora quale forma assumano i segnali che viaggiano su un cavo coassiale. Supponiamo di applicare una differenza di potenziale ΔV all'inizio di un cavo. A una distanza ΔX , la differenza di potenziale sarà data da

$$\Delta V = L_x \Delta X \frac{\partial I}{\partial t},$$

cioè dalla caduta di potenziale ai capi dell'induttanza equivalente del cavo. Questa stessa differenza di potenziale è quella che si trova ai capi del condensatore equivalente rappresentato dal cavo:

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C_x \Delta X} = \frac{\Delta Q}{C_x \Delta X} \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta t}{C_x \Delta X} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta t}{C_x \Delta X} \Delta I.$$

Dividendo la prima equazione per ΔX e la seconda per Δt si ha che, passando al limite per $\Delta X \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = L_x \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{C_x} \frac{\partial I}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

Derivando la prima equazione per x si ottiene, tenendo conto della seconda,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial t} = L_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial I}{\partial x} = L_x C_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} = L_x C_x \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

che è l'equazione delle onde, la cui soluzione è una combinazione di due funzioni qualunque di argomento $\omega t \pm kx$:

$$V(x, t) = f_1(\omega t + kx) + f_2(\omega t - kx)$$

per verificarlo è sufficiente calcolare le derivate seconde di V rispetto a t e a x e sostituire nell'equazione delle onde. L'equazione è soddisfatta se $k^2 = L_x C_x \omega^2$, cioè per $\omega/k = v = (L_x C_x)^{-\frac{1}{2}}$. Poiché v rappresenta proprio la velocità di propagazione dell'onda, se ne deduce che i segnali viaggiano nei cavi coassiali con una velocità pari proprio all'inverso del prodotto dell'induttanza e della capacità caratteristiche per unità di lunghezza. Sostituendo nell'espressione di v i valori tipici si ottiene una velocità di circa $2 \cdot 10^8$ m/s. Questo implica che un segnale immesso a un'estremità di un cavo coassiale, raggiunge l'altra estremità con un ritardo proporzionale alla lunghezza del cavo. Per avere un'idea di quanto rapidamente si propagano i segnali nei cavi coassiali sappiate che un cavo di circa 15 cm di lunghezza produce un ritardo di circa 1 ns.

Consideriamo ora una soluzione di tipo sinusoidale, che è una soluzione particolare, ma non troppo, visto che per il teorema di Fourier possiamo pensare ogni segnale di nostro interesse come somma di segnali sinusoidali.

La soluzione più generale possibile è, per quanto detto sopra:

$$\Delta V(x, t) = f_1 + f_2 = A e^{\omega t + kx} + B e^{\omega t - kx} .$$

Per la prima delle (1) si avrà pertanto che

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{ik}{L_x} (f_1 - f_2) .$$

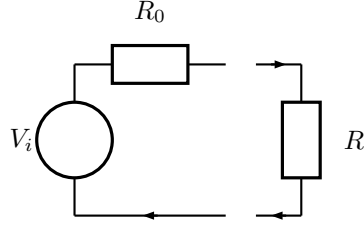
La corrente che scorre nel cavo si ottiene integrando l'equazione precedente:

$$I(x, t) = \frac{ik}{L_x} \left(\int_0^t A e^{\omega t' + kx} dt' - \int_0^t B e^{\omega t' - kx} dt' \right) = \frac{k}{L_x \omega} (f_1 + f_2) .$$

Ricordando che $\omega/k = (L_x C_x)^{-1}$ e osservando che $\sqrt{C_x/L_x}$ ha le dimensioni di una resistenza che possiamo chiamare R_0 , si ottiene

$$I(x, t) = \frac{1}{R_0} (f_1 - f_2) ,$$

che rappresenta il fatto che, in un cavo coassiale, in presenza di un'onda progressiva f_1 , si osserva sempre un'onda regressiva f_2 che si muove in senso opposto alla prima. In effetti possiamo pensare al cavo coassiale connesso a un'estremità a un generatore come a un circuito con un generatore in serie a una resistenza R_0 . All'estremità opposta possiamo pensare di collegare una resistenza R per misurare la differenza di potenziale esistente tra i due conduttori:



Per la legge di Ohm, la differenza di potenziale ai capi della resistenza di carico R è

$$V = RI = \frac{R}{R_0} (f_1 - f_2) ,$$

da cui si ricava che

$$f_2 = f_1 \frac{R - R_0}{R + R_0} .$$

Osserviamo ora che, se $R \rightarrow 0$, cioè quando i due conduttori del cavo sono in contatto, si ha che $f_2 = -f_1$. In altre parole l'onda regressiva è identica e opposta all'onda progressiva. Il segnale, che viaggia da sinistra verso destra, giunto al termine del cavo, si riflette rovesciandosi, in modo tale che la differenza di potenziale nel punto di contatto dei conduttori sia nulla.

Se invece $R \rightarrow \infty$, cioè quando il cavo è aperto, $f_2 = f_1$. Nel cavo si stabilisce un'onda regressiva uguale in modulo e segno a quella progressiva. In effetti, quando il cavo è aperto a un'estremità, nel momento in cui il segnale giunge al termine del cavo produce una differenza di potenziale tra i conduttori, il che equivale a disporre un generatore uguale a quello in ingresso alla fine del cavo.

Se $R = R_0$ (in questo caso il carico si dice *adattato* al cavo), $f_2 = 0$, cioè si sopprime completamente l'onda regressiva. Si tratta del caso ideale, dal momento che, normalmente, si desidera che nel cavo viaggi solo il segnale applicato all'ingresso. Per questa ragione i dispositivi elettrici ed elettronici che richiedono un cavo coassiale per essere connessi tra loro, hanno un'impedenza d'ingresso o d'uscita pari a quella del cavo coassiale che è di 50Ω . Qualora così non fosse, per sopprimere l'onda regressiva, si usa adattare l'ingresso del dispositivo usato per misurare il segnale in ingresso, disponendo su di esso un resistore da 50Ω , che in gergo si chiama *tappo*.