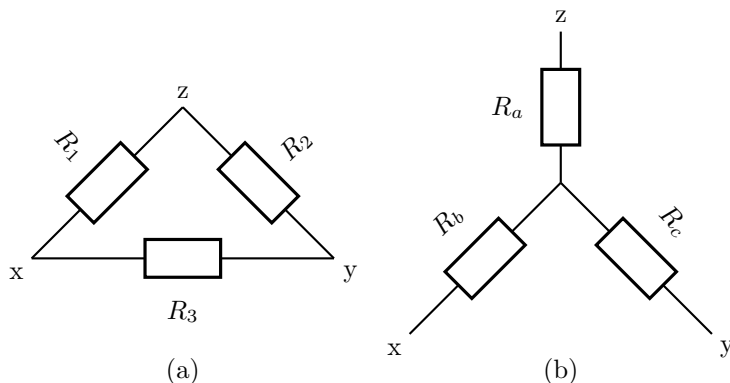


Trasformazione triangolo-stella

Giovanni Organtini

6 novembre 2006

Supponiamo di avere tre resistenze montate come in figura:



La configurazione (a) si chiama configurazione a triangolo, mentre quella (b) è detta configurazione a stella. È possibile scrivere delle relazioni che legano i valori delle resistenze R_1 , R_2 e R_3 a quelli delle resistenze R_a , R_b e R_c in modo tale da rendere equivalenti i due circuiti.

Se i circuiti sono equivalenti, in effetti, si deve avere che la resistenza *vista* da qualunque coppia di punti x , y e z di ciascuno sia la stessa. Se misuriamo la resistenza del circuito (a) tra i punti x e y , dovremmo trovare la resistenza ottenuta dal parallelo di R_3 con la serie R_1 , R_2 . Questa resistenza deve essere uguale a quella misurata negli stessi punti sul circuito (b), che non è altro che la serie di R_b e R_c .

Imponendo questa uguaglianza si trova

$$\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R_b + R_c}.$$

Applicando le stesse considerazioni alle coppie di punti (x, z) e (z, y) si ottengono altre due equazioni del tutto simili:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} = \frac{1}{R_a + R_b}$$

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3} = \frac{1}{R_a + R_c}.$$

Le tre equazioni devono valere contemporaneamente, perciò possiamo scrivere un sistema, riscrivendole come:

$$\begin{cases} R_b + R_c = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{\sum_{i=1}^3 R} \\ R_a + R_b = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{\sum_{i=1}^3 R} \\ R_a + R_c = \frac{R_2 (R_1 + R_3)}{\sum_{i=1}^3 R}. \end{cases}$$

Sottraendo la prima di queste equazioni dalla terza si ottiene

$$R_a - R_b = \frac{R_1 R_2 - R_1 R_3}{\sum_{i=1}^3 R}.$$

Sommando a questa equazione la seconda equazione del sistema si ha che

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{\sum_{i=1}^3 R}.$$

In maniera del tutto analoga si ottiene che

$$R_b = \frac{R_1 R_3}{\sum_{i=1}^3 R},$$

$$R_c = \frac{R_2 R_3}{\sum_{i=1}^3 R}.$$

In altre parole la resistenza della stella da impiegare per produrre un circuito equivalente a quello a triangolo è data dal prodotto delle resistenze del triangolo che si dipartono dal vertice della stella corrispondente, diviso per la somma di tutte le resistenze del triangolo.

La trasformazione inversa si ottiene osservando che

$$R_a R_b = \frac{R_1^2 R_2 R_3}{\sum_{i=1}^3 R},$$

$$R_a R_c = \frac{R_1 R_2^2 R_3}{\sum_{i=1}^3 R},$$

$$R_b R_c = \frac{R_1 R_2 R_3^2}{\sum_{i=1}^3 R}.$$

Sommando le tre equazioni si ha

$$R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c = \frac{\sum_{i=1}^3 R}{\left(\sum_{i=1}^3 R\right)^2} R_1 R_2 R_3 ,$$

da cui, semplificando

$$\frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_c} = R_1 .$$

In maniera del tutto simile si ottengono le altre due relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_b} &= R_2 , \\ \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_c} &= R_3 . \end{aligned}$$

In altre parole la resistenza del triangolo equivalente si trova scrivendo la somma dei prodotti ciclici delle resistenze della stessa divisa per il valore della resistenza disposta sul vertice della stella opposto al lato del triangolo rappresentato dalla resistenza da trovare.