Decadimento del K^+

Esercizio

Il tempo di vita medio (τ_0) di un K^+ a riposo (nel suo sistema di riferimento, in un sistema di riferimento solidale con la particella) è 1.2380×10^{-8} s. In un laboratorio vengono prodotti K^+ con velocità $v = 0.990c$, rispetto ad un sistema di riferimento solidale al laboratorio. Quanta strada potranno percorrere, in media, nel riferimento del laboratorio, in un intervallo di tempo pari a τ_0? Eseguire il calcolo in base ai principi della Fisica classica (che è una ragionevole approssimazione se $v << c$) e in base ai principi della Fisica relativistica.

Soluzione

$$v = 0.990c$$

$$\tau_0 = 1.2380 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$c = 2.998 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1}$$

$$d_{\text{classica}} = v \times \tau_0 = (0.990 \times 2.998 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1}) \times (1.2380 \times 10^{-8} \text{ s}) = \boxed{3.67 \text{ m.}}$$

$$d_{\text{reletivistica}} = v \times \gamma\tau_0 = v \times \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (0.990 \times 2.998 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1}) \times \left(\frac{1.2380 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1-\frac{0.990^2 c^2}{c^2}}}\right) = \boxed{26.0 \text{ m.}}$$

Decadimento del π^+

Esercizio

Il tempo di vita medio di un π^+ nel suo sistema di riferimento è 2.6033×10^{-8} s.

1. Se un π^+ viaggia con velocità 0.95 c rispetto alla Terra, qual è il suo tempo di vita medio misurato da un osservatore a riposo sulla Terra?
2. Qual è la distanza media che percorre prima di decadere misurata da un osservatore a riposo sulla Terra?

Soluzione

$$v = 0.95c$$

$$\tau_0 = 2.6033 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$c = 2.998 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1}$$

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.6033 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1-\frac{0.95^2c^2}{c^2}}} = \boxed{8.3 \times 10^{-8} \text{ s}}$$

$$d = v \times \tau = v \times \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (0.95 \times 2.998 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1}) \times \left(\frac{2.6033 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1-\frac{0.95^2c^2}{c^2}}}\right) = \boxed{24 \text{ m.}}$$

Soluzioni

1. Sia S' un sistema di riferimento solidale all'orologio. Sia S un sistema di riferimento solidale all'osservatore, scegliamo l'asse x di S parallelo ed equiverso alla velocità ($\vec{v}$) con cui l'orologio si muove rispetto ad S. Indichiamo con $\Delta t'$ il tempo proprio dell'orologio, e con Δt il tempo misurato dall'osservatore.

$$\left.\begin{aligned} &\Delta t = 2\,\Delta t' \text{ (per ipotesi dell'esercizio)} \\ &\Delta t = \gamma\,\Delta t' \text{ (dilatazione del tempo)} \end{aligned}\right\} \rightarrow \gamma = 2.$$

Dunque, il modulo (v) della velocità con cui l'orologio si muove rispetto all'osservatore è

$$v = c\beta = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 2.998\times10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}\sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = \boxed{2.6\ \times10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Soluzioni

2. Sia S un sistema di riferimento solidale all'asta e S' un sistema di riferimento solidale all'osservatore, scegliamo l'asse x' di S' parallelo ed equiverso alla velocità ($\vec{v}$') con cui l'osservatore vede viaggiare l'asta. La lunghezza della sbarra misurata in S è la distanza *L* fra i suoi due estremi misurata nello stesso istante (Δt = 0).

$$\left.\begin{array}{l} L = 2\,L' \text{ (per ipotesi)} \\ L = \gamma\, L' \text{ (contrazione delle lunghezze)} \end{array}\right\} \rightarrow \gamma = 2.$$

Dunque, il modulo (v') della velocità con cui l'asta si muove rispetto all'osservatore è

$$v' = c\beta' = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma'^2}} = 2.998\times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}\sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = \boxed{2.6\ \times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Cinematica relativistica

Soluzioni

3. Sia S un sistema di riferimento solidale all’orologio atomico e S’ un sistema di riferimento solidale all’osservatore, scegliamo l’asse x’ di S’ parallelo ed equiverso alla velocità $(\vec{v})$ con cui l’osservatore vede l’orologio muoversi.

   Visto che v **= 400 m/s**, siamo nel “limite di piccole velocità” (v << c), per cui, come abbiamo visto a lezione,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

   Essendo

$$\Delta t' = \gamma\,\Delta t \cong \left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t = \Delta t + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\,\Delta t$$

   l’osservatore misurerà un intervallo di tempo

$$\boxed{\Delta t' = \Delta t + \delta t}$$

   con

$$\delta t = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\,\Delta t = \frac{1}{2}\frac{400^2\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{(2.998\times 10^{8})^{2}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2} 3600\ \mathrm{s} = \boxed{3\ \mathrm{ns}.}$$

Soluzioni

4. Il tempo di vita medio dei muoni che si misura in S è

$$\tau = \gamma\,\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1-0.95^2}}\,2.20\ \mu\text{s} = \boxed{7.0\ \mu\text{s}}$$

Il numero di muoni sopravvissuti al tempo t_1 è

$$N(t_1) = N_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

Dove N_0 è il numero di muoni iniziali. Nel nostro caso

$$t_1 : d_1 = v \times t_1 = 3.0\ \text{km}$$

Quindi

$$\frac{N(t_1)}{N_0} = e^{-\frac{t_1}{\tau}} = e^{-\frac{\frac{d_1}{v}}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\tau_0}} = e^{-\frac{\frac{3.0\times10^3\ \text{m}}{0.95\times2.998\times10^8\ \text{m/s}}}{\frac{1}{\sqrt{1-0.95^2}}\times2.20\times10^{-6}\ \text{s}}} = \boxed{22\ \%.}$$

Ovvero, dopo aver viaggiato per 3.0 km, sopravvive il 22 % dei muoni iniziali.

Soluzioni

5. Sia S’ un sistema di riferimento solidale all’asta. L’asta forma un angolo θ rispetto all'asse x’, quindi le sue proiezioni lunga l’asse x’ ed y’ sono

$$L'_{\mathrm{x}} = L_0 \cos\theta$$

$$L'_{\mathrm{y}} = L_0 \sin\theta$$

L’asta si muove con velocità $\vec{v}$ lungo la direzione orizzontale (**asse x**) rispetto all’osservatore (S), per cui

$$L_{\mathrm{x}} = \frac{1}{\gamma} L'_{\mathrm{x}} = \frac{1}{\gamma} L_0 \cos\theta$$

$$L_{\mathrm{y}} = L'_{\mathrm{y}} = L_0 \sin\theta$$

La lunghezza dell’asta misurata dall’osservatore è

$$L = \sqrt{L_{\mathrm{x}}^2 + L_{\mathrm{y}}^2} = L_0 \sqrt{\frac{1}{\gamma^2}\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

Dato che $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2$ si ha

$$L = L_0\sqrt{(1-\beta^2)\cos^2\theta + \sin^2\theta} = L_0\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta} = \boxed{L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}\ .}$$

L’angolo che l'asta forma con l'asse x è

$$\theta_0 = \arctan\frac{L_{\mathrm{y}}}{L_{\mathrm{x}}} = \arctan\frac{L_0\sin\theta}{\frac{1}{\gamma}L_0\cos\theta} = \arctan(\gamma\tan\theta) = \boxed{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\tan\theta\right).}$$

Cinematica relativistica

Soluzioni

6. Abbiamo visto a lezione che

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}$$

dove

- u_x è la velocità di un oggetto misurata nel sistema di riferimento S,
- u'_x è la velocità dell'oggetto misurata nel sistema di riferimento S' e
- V è la velocità del sistema S' (parallela ed equiversa all'asse x di S) misurata nel sistema S.

Sia S un sistema di riferimento solidale alla Terra e S' un sistema di riferimento solidale all'astronave che si muove, rispetto ad S, nel verso delle x positive con velocità V. L'altra astronave ha velocità

- $u_x = -V$ in S;
- $u'_x = -0.70c$ in S'.

Per cui

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}} = \frac{-V - V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} = \frac{-2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} \qquad u'_x\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) = -2V \qquad u'_x \frac{V^2}{c^2} + 2V + u'_x = 0$$

Le due radici di questa equazione sono

$$V_1 = 1.2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$V_2 = 6.6 \times 10^8 \text{ m/s} > c$$

La seconda radice è da scartare, perché rappresenterebbe una velocità maggiore della velocità della luce nel vuoto.

Dunque, le due astronavi viaggiano rispetto alla Terra con velocità $\pm V_1 = \pm 1.2 \times 10^8$ m/s = $\boxed{\pm 0.40c}$