

## Esercizio

Si consideri la produzione del vettore bosone  $Z^0$  attraverso il processo

$$e^+ + e^- \rightarrow Z^0$$

1. In un esperimento a fasci incrociati, con fasci di ugual energia, quale deve essere la minima energia dei fasci perché la reazione abbia luogo?
2. In un esperimento a targhetta fissa, in cui un fascio di  $e^+$  viene sparato su un bersaglio fisso di  $e^-$ 
  - a. Qual è l'energia minima che deve avere il fascio di positroni perché la reazione abbia luogo?
  - b. Calcolare l'energia, nel sistema di riferimento del laboratorio, dello  $Z^0$  prodotto a soglia.
  - c. Dire di quanto è più piccola rispetto alla velocità della luce, la velocità nel sistema di riferimento del laboratorio dello  $Z^0$  prodotto a soglia (ossia, calcolare  $(1 - \beta)$ ).
  - d. Calcolare l'energia massima, nel sistema di riferimento del laboratorio, che può avere un muone prodotto in seguito al decadimento  $Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  di uno  $Z^0$  prodotto a soglia.

Si usi:

$$c = 1$$

$$m_{e^+} = m_{e^-} = m_e = 0.511 \text{ MeV}$$

$$m_{Z^0} = 91.2 \text{ GeV}$$

$$m_{\mu^+} = m_{\mu^-} = m_\mu = 106 \text{ MeV}$$

## Soluzione

### 1. FASCI INCROCIATI

$$\sqrt{s} = E_{e^+} + E_{e^-} = 2E$$

essendo fasci di elettroni e positroni ( $m_{e^+} = m_{e^-} = m_e$ ) incrociati ( $\vec{p}_{e^+} = -\vec{p}_{e^-}$ ) di ugual energia ( $E_{e^+} = E_{e^-} = E$ ).

A soglia  $\sqrt{s} = m_{Z^0}$ , dunque:

$$2E^{\text{soglia}} = m_{Z^0}$$

Da cui:

$$E_{\text{soglia}} = \frac{m_{Z^0}}{2} = \boxed{45.6 \text{ GeV}}.$$

### 2.a TARGHETTA FISSA

$$\begin{aligned} s &= (E_{e^+} + E_{e^-})^2 - |\vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-}|^2 = \\ &= E_{e^+}^2 + E_{e^-}^2 + 2E_{e^+}E_{e^-} - |\vec{p}_{e^+}|^2 = \\ &= m_{e^+}^2 + m_{e^-}^2 + 2E_{e^+}m_{e^-} = \\ &= 2m_e^2 + 2E_{e^+}m_e \end{aligned}$$

Essendo  $\vec{p}_{e^-} = 0$  e  $m_{e^+} = m_{e^-} = m_e$ .

A soglia  $s = m_{Z_0}^2$ , dunque:

$$2m_e^2 + 2E_{e^+}^{\text{soglia}} m_e = m_{Z_0}^2$$

Da cui

$$\boxed{E_{e^+}^{\text{soglia}}} = \frac{m_{Z_0}^2 - 2m_e^2}{2m_e} \cong \boxed{\frac{m_{Z_0}^2}{2m_e} = 8.14 \times 10^6 \text{ GeV}}.$$

2.b

$$\gamma_{Z_0} = \frac{E_{Z_0}}{m_{Z_0}} = \frac{E_{\text{iniziale}}^{\text{lab}}}{m_{Z_0}}$$

dato che  $E_{Z_0} = E_{\text{iniziale}}^{\text{lab}}$ , per la conservazione dell'energia.

A soglia,

$$\gamma_{Z_0} = \frac{E_{e^+}^{\text{soglia}} + m_{e^-}}{m_{Z_0}} = \frac{\frac{m_{Z_0}^2}{2m_e} + m_e}{m_{Z_0}} = \frac{m_{Z_0}^2 + 2m_e^2}{2m_e m_{Z_0}} \cong \frac{m_{Z_0}}{2m_e}$$

e l'energia

$$\boxed{E_{Z_0}} = \gamma_{Z_0} m_{Z_0} = \boxed{\frac{m_{Z_0}^2}{2m_e} = E_{e^+}^{\text{soglia}}}.$$

2.c

La velocità dello  $Z^0$ :

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{m_{Z_0}^2}} \cong 1 - \frac{4m_e^2}{2m_{Z_0}^2}$$

quindi:

$$\boxed{1 - \beta} = \frac{2m_e^2}{m_{Z_0}^2} = \boxed{6.28 \times 10^{-11}}.$$

2.d

Consideriamo il decadimento

$$Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

Per le trasformazioni di Lorentz, l'energia del muone ( $E_\mu$ ) nel sistema di riferimento del laboratorio è legata alla sua energia ( $E_\mu^*$ ) e al modulo del suo impulso ( $p_\mu^*$ ) nel sistema di riferimento del centro di massa attraverso la :

$$E_\mu = \gamma_{Z_0} \left( E_\mu^* + \beta_{Z_0} p_\mu^* \cos \theta_\mu^* \right)$$

Dove  $0 \leq \theta_\mu^* \leq 180^\circ$  è l'angolo che il muone forma nel sistema di riferimento del centro di massa rispetto alla direzione del boost di Lorentz.

Essendo:

$$\gamma_{Z_0} = \frac{E_{Z_0}}{m_{Z_0}}$$

$$\beta_{Z_0} = \frac{p_{Z_0}}{E_{Z_0}}$$

$$E_{\mu}^* = \frac{m_{Z_0}}{2}$$

$$p_{\mu}^* = \sqrt{\left(\frac{m_{Z_0}}{2}\right)^2 - m_{\mu}^2} \cong \frac{m_{Z_0}}{2}$$

Allora:

$$E_{\mu} = \frac{E_{Z_0}}{m_{Z_0}} \left( \frac{m_{Z_0}}{2} + \frac{p_{Z_0}}{E_{Z_0}} \frac{m_{Z_0}}{2} \cos \theta_{\mu}^* \right)$$

L'energia del muone  $E_{\mu}$  è massima per  $\cos \theta_{\mu}^* = 1$ , cioè quando muone e anti-muone, nel sistema di riferimento del centro di massa, sono *back-to-back* lungo la direzione del boost di Lorentz, quindi:

$$\boxed{E_{\mu}^{\text{MAX}}} = \frac{E_{Z_0} + p_{Z_0}}{2} \cong E_{Z_0} = \boxed{E_{e^+}^{\text{soglia}}}$$