I esonero 12/04/2013 - esercizio 2

Un condensatore è costituito da tre sottili gusci sferici metallici concentrici A, B, C rispettivamente di raggi a, b, c con $a < b < c$. Il guscio più interno è connesso con quello più esterno tramite un sottile filo metallico isolato che passa attraverso un piccolo foro praticato nel guscio intermedio.

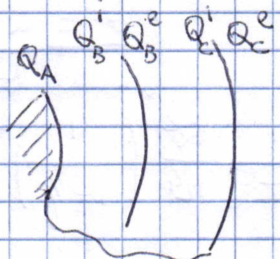
Una carica Q è depositata sul guscio intermedio mentre il sistema costituito dai conduttori connessi A e C ha carica totale nulla.

a) Si calcoli il rapporto tra le cariche Q_B^i e Q_B^e distribuite rispettivam. sulle superfici interna ed esterna del guscio intermedio.

b) Si ricavi l'espressione della densità di energia elettrostatica in funzione della distanza r dal centro del sistema e della carica Q, nello spazio compreso tra A e B e in quello compreso tra B e C.

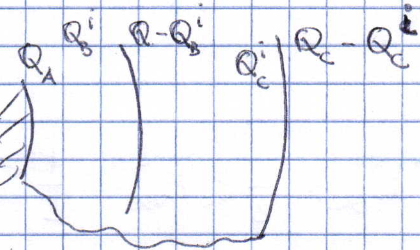
d) Si calcoli la carica accumulata su A e su C, indicando il rispettivo segno, assumendo $a = 12\,cm$, $b = 14\,cm$, $c = 18\,cm$ e $Q = 2.0 \cdot 10^{-8}\,C$

c) Si determini la condizione che devono verificare i raggi a, b, c affinché le pressioni elettrostatiche interna ed esterna al guscio intermedio siano uguali.

a) 

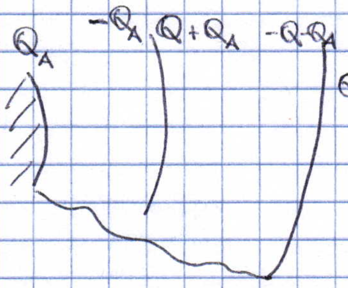
$Q_B = Q_B^i + Q_B^e = Q$

$Q_C = Q_C^i + Q_C^e$



induzione completa: $Q_B^i = -Q_A$

$Q_C^i = -Q_B^e = -Q + Q_B^i = -Q - Q_A$



$Q_C + Q + Q_A = Q$ poiché $Q_A + Q_C = 0$

Quindi il rapporto $\eta = \dfrac{Q_B^i}{Q_B^e}$ è pari a $\eta = \dfrac{-Q_A}{Q + Q_A}$

La carica Q_A si ricava usando la condizione sulle ddp tra i gusci: a causa del collegamento A - C, deve essere $V_A - V_B = V_C - V_B$.

Perciò:

$$\int_a^b E(r)\,dr = \int_c^b E(r)\,dr$$

$$\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{Q+Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)$$

da cui risulta:

$$Q_A = Q\,\frac{b-c}{c-a}\,\frac{a}{b} \implies \eta = -\frac{\cancel{Q}\,\frac{b-c}{c-a}\,\frac{a}{b}}{\cancel{Q}\left(1+\frac{b-c}{c-a}\,\frac{a}{b}\right)} = -\frac{a(b-c)}{c(b-a)}$$

b)

$$u_{AB} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{AB}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{r^4}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^2$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{b-c}{c-a}\,\frac{a}{b}\right)^2$$

$$u_{BC} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{BC}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q+Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{r^4}\left(\frac{1}{1+\eta}\right)^2$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{b-a}{c-a}\,\frac{c}{b}\right)^2$$

c) $p = u \implies u_{AB}(r=b) = u_{BC}(r=b)$

$$\Downarrow$$

$$E_{AB}(r=b) = E_{BC}(r=b)$$

$$\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 b^2} = \frac{Q+Q_A}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$$

$$-Q\,\frac{\eta}{1+\eta} \qquad\qquad Q\,\frac{1}{1+\eta}$$

$$\implies \eta = 1 \quad \left(\iff \frac{b}{c}+\frac{b}{a} = 2\right)$$

d) Con i dati forniti, si trova $\eta = 4/3$

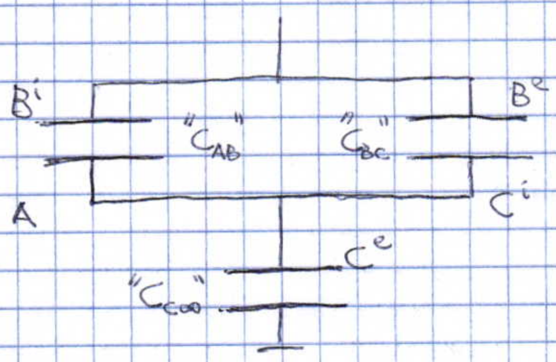
$$Q_A = -\frac{4/3}{1+4/3}\underbrace{Q}_{2\cdot 10^{-8}\,C} = -1.1\cdot 10^{-8}\,C$$

Att.ne Imprecisioni nella soluzione pubblicata

$$Q_C = -Q_A = +1.1\cdot 10^{-8}\,C$$

Soluzione alternativa

Il sistema è equivalente a tre condensatori così collegati:



in cui le armature corrispondono alle superfici dei conduttori sferici.

Notare che, essendo $Q_B^i + Q_B^e = Q$, per induzione $Q_A + Q_C^i = -Q$, ma poiché A+C è neutro, dovrà necessariamente essere $Q_C^e = Q$. Per rendere conto della carica presente sulla faccia esterna di C, e di conseguenza del valore del potenziale del conduttore A+C rispetto a V_∞, si deve quindi rappresentare C^e come l'armatura di un condensatore che ha l'altra armatura connessa a massa. Tale condensatore ha capacità

$$C_\infty = \lim_{R\to\infty} 4\pi\varepsilon_0 \frac{cR}{R-c} = 4\pi\varepsilon_0 c$$

cioè la capacità di un conduttore sferico di raggio c.

Le altre due capacità sono

$$C_{AB} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \qquad C_{BC} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{bc}{c-b}$$

Poiché C_{AB} e C_{BC} sono in parallelo, segue immediatamente

$$\frac{Q_B^i}{C_{AB}} = \frac{Q_B^e}{C_{BC}} \Longrightarrow \eta = \frac{Q_B^i}{Q_B^e} = \frac{C_{AB}}{C_{BC}} = \frac{a(c-b)}{c(b-a)}$$

NB In questo caso, la presenza di C_∞ è irrilevante per rispondere alla domanda, ma necessaria per disegnare il circuito equivalente in modo corretto.