Soluzione Esercizi del 4 Mar 2016

Esercizio 1

1. calcolo della carica complessiva distribuita nella sfera, e del suo segno:

   Possiamo usare sia l'espressione fornia del campo che il teorema di Gauss sulla superficie della sfera:

   $$\begin{aligned} E(R) &= kR^2 && (1) \\ E(R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{tot}}{R} && (2) \end{aligned}$$

   da cui segue
   $Q_{tot} = 4\pi\epsilon_0 kR^4 = (9 \cdot 10^9)^{-1} \cdot 9 \cdot 10^3 \cdot (0.1)^4 = 10^{-10}$ C.

   La carica totale è positiva.

2. densità di carica in un punto generico interno alla sfera:

   Usiamo la prima equazione di Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E_0} = \rho(x, y, z)/\epsilon_0$, con $\vec{E_0} = kr^2\hat{r} = kr\vec{r} = (krx, kry, krz)$. Ricordando che $\partial r/\partial x_i = x_i/r$

   $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E_0} = k(r + x^2/r + r + y^2/r + r + z^2/r) = 4kr$$

   Volendo fare il calcolo in coordinate sferiche dove il campo ha componenti $E_0 = (kr^2, 0, 0)$, bisogna ricordarsi che la divergenza è data da

   $$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E_0} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(E_r r^2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(E_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(E_\phi) && (3) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(kr^2r^2) + 0 + 0 \\ &= \frac{4kr^3}{r^2} = 4kr \end{aligned}$$

   che coincide con quanto ottenuto nel sistema cartesiano.

3. potenziale al centro della sfera: Il potenziale al centro ̀dato da

$$V_0(0) - V_0(\infty) \quad = \quad \int_0^\infty \vec{E}_0 \cdot \vec{dl}$$

dove

$$\begin{aligned} r < R : E_0(r) &= kr^2 \\ r \geq R : E_0(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{tot}}{r^2} = k\frac{R^4}{r^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Si ha

$$\begin{aligned} V_0(0) &= \int_0^R kr^2 dr + \int_R^\infty k\frac{R^4}{r^2} dr \\ &= \frac{k}{3}R^3 + kR^3 = \frac{4}{3}kR^3 = 12V \end{aligned} \tag{5}$$

4. per calcolare la velocità v_f di un elettrone che arriva al centro partendo dalla superficie con velocità iniziale $v_0 = 0$ m/s, possiamo usare la conservazione dell'energia

$$E_f = E_i \tag{6}$$

$$qV(0) + \frac{1}{2}mv_f^2 = qV(R) + 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_f^2 &= q(V(R) - V(0)) \\ v_f^2 &= \frac{2}{m}(-e)\langle kR^3 - \frac{4}{3}kR^3\rangle \\ v_f &= \sqrt{\frac{2e}{m}\frac{1}{3}kR^3} = 1.03 \times 10^6 \, m/s \end{aligned}$$

Esercizio 2

Il potenziale al centro è dato da

$$V_0(0) \quad = \quad \int_0^\infty \vec{E}_0 \cdot \vec{dl}$$

Il valore del campo si può determinare con il teorema di Gauss nelle tre regioni. All'interno di cavit̀non essendoci cariche, il campo ̀nullo.

$$E_0(r) = 0 \qquad r < R_1$$

All'esterno della sfera, il campo equivale a quello generato da una carica Q posta nell'origine:

$$E_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad r > R_2$$

Invece nel guscio, bisogna tenere conto della carica inclusa all'interno di una superficie di raggio r, e si ha

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E(r) &= Q_{int}/\epsilon_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{\frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)}\frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3) \end{aligned} \tag{8}$$

da cui

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2^3 - R_1^3}\frac{r^3 - R_1^3}{r^2} \qquad R_1 \le r \le R_2$$

Calcoliamo infine la differenza di potenziale:

$$\begin{aligned} V_0(0) &= \int_0^{R_1} 0 \cdot dr + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2^3 - R_1^3}\int_{R_1}^{R_2}\frac{r^3 - R_1^3}{r^2}dr + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_2}^{\infty}\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2^3 - R_1^3}\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) + R_1^3(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_2} \end{aligned} \tag{9}$$

Dato che $R_2 = 10^{-1}$ m, $R_1 = 10^{-2}$ m, si ha

$$\begin{aligned} R_2^3 - R_1^3 &= 10^{-3} - 10^{-6} \simeq 10^{-3} \\ R_2^2 - R_1^2 &= 10^{-2} - 10^{-4} \simeq 10^{-2} \\ R_1^3(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) &= 10^{-6}(10 - 100) = -9 \times 10^{-5} \end{aligned} \tag{10}$$

e ricordando che $Q = 10^{-9}$ C e $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9$

$$\begin{aligned} V_0(0) &= 9 \times 10^9 \times \frac{10^{-9}}{10^{-3}}(\frac{1}{2} \times 10^{-2} - 9 \times 10^{-5}) + 9 \times 10^9 \times \frac{10^{-9}}{10^{-1}} \\ &\simeq \frac{9}{2} \times \frac{1}{10^{-1}} + 9 \times \frac{1}{10^{-1}} \\ &= 135V \end{aligned} \tag{11}$$