$$q_1 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1'^3$$

$$q_2 = -\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2'^3$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}'_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi\rho\,\vec{r}_1' - \frac{4}{3}\pi\rho\,\vec{r}_2'\right) =$$

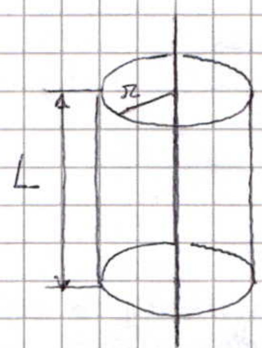
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1' - \vec{r}_2') = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{R}$$

$\Rightarrow$ è uniforme e proporzionale alla distanza fra i centri.

Se la cavità è concentrica alla sfera, il campo all'interno è nullo, come ricavabile anche in modo diretto (consideraz. di simmetria) e dal teorema di Gauss.

$\boxed{\text{MS E.I.11}}$

Campo elettrico di un filo uniformem. carico.



Il problema ha simmetria cilindrica ($\Leftrightarrow$ invarianza per rotaz. attorno a un asse). Perciò il campo sarà:

- in modulo dipendente dalla sola distanza r dall'asse coincidente con il filo.
- ortogonale al filo

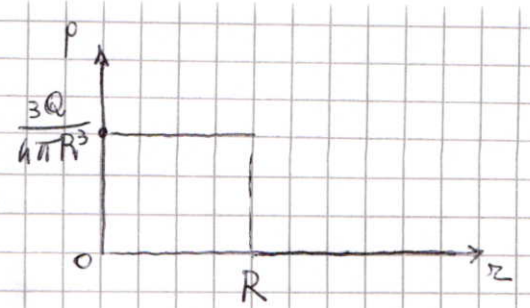
Quindi, attraverso una sup. cilindrica centrata sul filo, si ha

$$\Phi_S(\vec{E}(r)) = \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ (perché } \vec{E} \perp \hat{n})}}{\Phi_b} + \Phi_l = 2\pi r \cdot L \cdot E(r)$$

per il t. di G.

$$\Phi_S = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

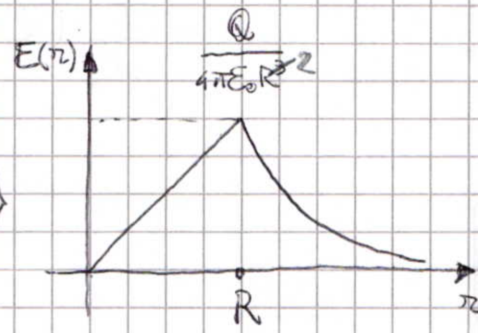
$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0} = 2\pi r \cancel{L} E(r) \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



a) $r < R$:

$$q(r) = \int_0^r \rho \, d\tau = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, r<R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} Q \left(\frac{r}{R}\right)^3 \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot \vec{r}$$



b) $r \geq R$

$$q(r) \equiv Q$$

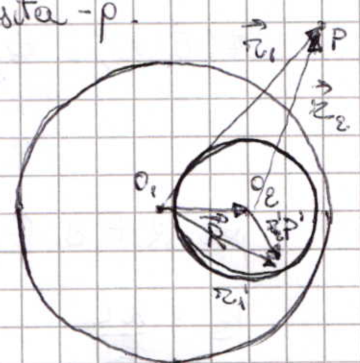
$$\vec{E}(\vec{r}, r \geq R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} Q \, \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r}$$

$\boxed{\text{MS E.I.10}}$

In una sfera O_1 e uniformemente carica con densità ρ è praticata una cavità, pure sferica, con centro in O_2, vuota.
Se R_1 e R_2 sono i raggi delle due sfere, calcolare il campo elettrico in un punto P esterno alla sfera 1 e in un punto P' interno ~~alla~~ alla sfera 2.

E' un tipico esempio di applicazione del principio di sovrapposizione.

Sfera omogeneam. carica ρ + sferetta (= cavità) con densità $-\rho$.



a) P esterno

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\vec{r}_2$$

$$Q_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 \qquad Q_2 = -\rho \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

$$\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$(\vec{r}_1' - \vec{r}_2')$$

b)

$$\vec{E}'_{tot} = \vec{E}_1' + \vec{E}_2' = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1'^3}\vec{r}_1' + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2'^3}\vec{r}_2' =$$

Potenziale Elettrostatico (E.I.20, E.I.21)

def. $\int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = V_0(A) - V_0(B)$

per una carica puntiforme, $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$

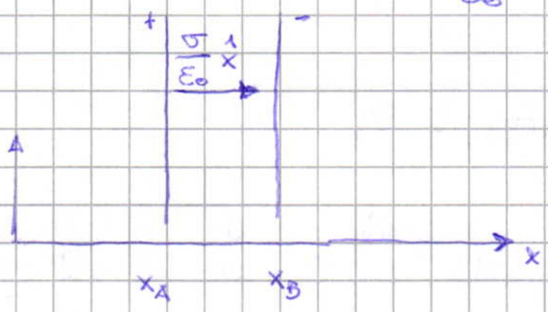
Nel caso di uno strato di carica, si ha:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_B - x_A)$$

$$\Rightarrow V(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x + C$$

Scegliendo $V(0) = 0 \iff C = 0$, si ha $V(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x$

Nel caso di un doppio strato, ricordiamo che il campo è non nullo solo tra i due strati, diretto ortogonalmente ad essi e in modulo (p. di sovrapp.) pari a σ/ε_0:



applicando la definizione di cui sopra, si trova $V(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} x + C$ internamente all'intercapedine.

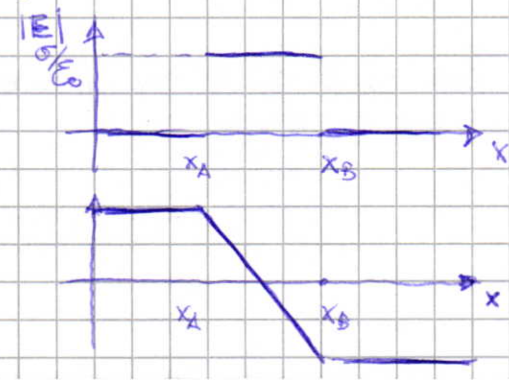
Esternamente il potenziale è costante (il campo è nullo) e, per continuità della funzione V, deve valere:

$$V(x < x_A) = V(x_A) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} x_A + C$$

$$V(x > x_B) = V(x_B) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} x_B + C$$

con C determinata dalle condizioni al contorno (ad es. $V(0) = 0$).

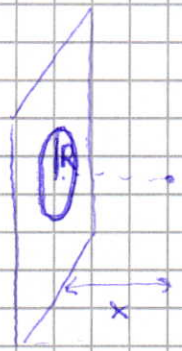
Graficamente:



(a meno di una traslazione sull'asse y, dipendente dalla scelta di C)

Calcoliamo ora il potenziale del piano carico in modo diretto.

Procedendo con il p. di sovrapp. sommando i contributi di tanti anelli di raggio R crescente e spessore infinitesimo, si trova:



$$V(x) = \int \frac{\sigma\, dS'}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int \frac{\sigma \cdot 2\pi R\, dR}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2+x^2}} =$$

$\downarrow$

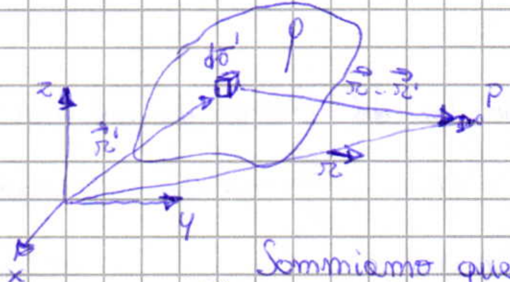
invarianza x traslazioni lungo y e z $\Rightarrow$ dipende solo da x.

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+x^2}\right]_0^{\infty}$$

$$= \text{(formalmente)} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + \infty$$

Questo dipende dal fatto che nel sommare i contributi elementari al potenziale abbiamo già scelto una costante ($=0$, in modo che il singolo contributo all'infinito sia nullo) ma il fatto che la distribuzione si estenda fino all'infinito fa divergere comunque la somma dei potenziali.

Risolviamo allora il problema in questo modo:



$$dV_0 = \frac{\rho\, d\tau'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|} + dC$$

Sommiamo questi contributi richiedendo che dC sia tale da annullare il termine dV_0 in un punto P_0 ($\vec{r}_0$) anziché all'infinito

$$\Rightarrow \frac{\rho\, d\tau'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_0-\vec{r}'|} + dC = 0 \iff dC = -\frac{\rho\, d\tau'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_0-\vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow dV_0 = \frac{\rho\, d\tau'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\rho\, d\tau'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_0-\vec{r}'|}$$

Tornando all'esempio precedente: (E.I.22)

$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2+x^2}$ e scegliamo come P_0 il punto del piano su cui centriamo le corone circolari.

$|\vec{r}_0-\vec{r}'| = R$

$$V_0(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \sigma \, dS' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}\,'|} \right) =$$

$$= \frac{1}{{}_2\cancel{4\pi}\varepsilon_0} \int \sigma \cdot \cancel{2\pi} R \, dR \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} - \frac{1}{R} \right) =$$

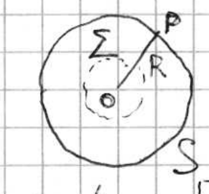
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{R \, dR}{\sqrt{R^2 + x^2}} - \int_0^\infty dR$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + x^2} - R \right]_0^\infty = - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x$$

MS 1.13

Una carica Q, 10^{-8} C è distribuita all'interno di una sfera di raggio R, 10 cm in modo che la densità di carica sia proporzionale alla distanza r dal centro della sfera.

Calcolare la d.d.p. tra il centro e la superficie della sfera.



$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$

t. di G.

$$\Phi(\vec{E}) = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\int_{\Sigma} \rho(r)\, d\tau'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi r^4}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\, r^2}$$

(*)

$$\rho(r) = \rho_0 r \longrightarrow \int_S \rho_0 r\, d\tau = Q$$

$$Q = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\; \rho_0 r \cdot r^2 \sin\theta =$$ (se necessario, richiamare l'elem. di volume in coord. sferiche con il disegno del tassello di cocomero)

$$= 4\pi\, \frac{1}{4} R^4 \cdot \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{Q}{\pi R^4} \quad (*)$$

$$\Delta V = \int_0^P \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^R \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\int_0^R r^2\, dr = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0 R} = 299.4\,V$$ (ma è corretto scrivere 300)

MS 1.15

E' dato un piano infinito, nel vuoto, carico con densità superficiale σ uniforme. Sul piano è praticato un foro circolare di raggio R.

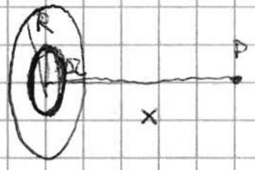
Ricavare l'espressione del campo elettrico in un punto P, sulla perpendicolare al piano passante per il centro del foro, a distanza x dal piano.

in gen. posizione x

Per il principio di sovrapposizione, il campo in tutto lo spazio è uguale alla somma del campo di uno strato carico con densità σ e di un disco uniformemente carico con densità −σ.

⟹ calcoliamo il campo di un disco lungo l'asse.

Possiamo applicare il princ. di sovrapp. per anelli di spess. infinitesimo sia per il campo, sia per il potenziale. Quest'ultimo caso è generalmente più semplice, almeno perché richiede di maneggiare solo quantità scalari.



(come NV 1.6, ma att. ! sulla mia edizione c'è un segno sbagliato)

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2+x^2}} \qquad dq = \underbrace{2\pi r\, dr}_{\text{area dell'anello di spess. } dr} \cdot \sigma$$

$$dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\, dr$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\, dr$$ (a meno di una costante arbitraria)

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{r^2+x^2}\right)\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - |x|\right) \qquad |x| = \sqrt{x^2}$$

(e infatti deve essere una funzione pari)

$$E_{asse} = -\frac{dV}{dx} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} - \operatorname{sgn}(x)\right)$$

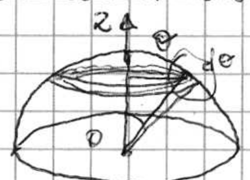
Nel nostro caso, la densità di carica è $-\sigma$, per cui l'espressione precedente cambia segno.

Sommando il contributo $E_s = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \operatorname{sgn}(x)$ dello strato, abbiamo infine:

$$E_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\operatorname{sgn}(x) + \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}} - \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\operatorname{sgn}(x)} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$\boxed{\text{MS } 1.29}$

Campo e potenziale nel centro O di un guscio emisferico di raggio R uniformem. carico con densità σ



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{R} \qquad dq = 2\pi \underbrace{R\sin\theta}_{\text{raggio anello}} \cdot \underbrace{R\, d\theta}_{\text{spess anello}} \cdot \sigma$$

$$dV = \frac{\sigma}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 \cancel{R}} \cdot \cancel{2\pi} R^{\cancel{2}} \sin\theta\, d\theta$$

$$V = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R \sin\theta\, d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R$$

ma poiché abbiamo fatto uso del fatto che il punto O è sempre a distanza R da tutti gli anelli, questa espressione vale solo in O e non è generalizzabile nell'intorno di O ($\Leftrightarrow$ sull'asse). Perciò il campo